VISIT…

удобное обозначение, которое будем использовать и в дальнейшем, $dS_k = (\partial U^k/\partial n)\,dS$, так что можно записать соотношения:

$$dS_1 = dx_2\,dx_3, \quad dS_2 = dx_3\,dx_1, \quad dS_3 = dx_1\,dx_2,$$
$$dS_4 = x_2\,dS_3 - x_3\,dS_2, \quad dS_5 = x_3\,dS_1 - x_1\,dS_3, \tag{7}$$
$$dS_6 = x_1\,dS_2 - x_2\,dS_1.$$

По самому определению величины T_{hk} очевидно равенство

$$T_{hk} = \rho \int\int U^h\,dS_k = \rho \int\int U^k\,dS_h. \tag{8}$$

Очевидно также, что если обозначить через p скалярное давление, то $\int\int p\,dS_1$, $\int\int p\,dS_2$, $\int\int p\,dS_3$ представляют собой компоненты *силы*, с которой тело Σ действует на жидкость, а $\int\int p\,dS_4$, $\int\int p\,dS_5$, $\int\int p\,dS_6$ представляют собой компоненты *момента* этой силы.

Теперь рассмотрим течение, возникающее из состояния покоя при единичном ускорении в направлении q_h. Легко подсчитать, что если в начале $U = 0$ и $\partial U/\partial t = U^h$, то $U(x; t)$ отличается от $tU^h(x)$ на бесконечно малую величину второго порядка относительно t. Так как мы свели задачу к случаю $g = 0$, то из уравнения Бернулли для давления жидкости, движущейся с ускорением [гл. I, (5)], следует уравнение

$$p + \frac{1}{2}\rho\nabla U\nabla U + \rho\frac{\partial U}{\partial t} = \text{const}. \tag{8*}$$

Отсюда видно, что начальное гидродинамическое давление p^h всюду равно произведению «потенциала ускорений» U^h на плотность ρ. Соответствующая подстановка в формулу (8) дает $T_{hk} = \int\int p^h\,dS_k$, т. е. *$T_{hk}$ есть k-компонента силы при движении из состояния покоя, вызванном единичным ускорением в направлении q_h*. В частности, Q_1, Q_2, Q_3 представляют собой обычные компоненты *силы* относительно выбранных нами осей, а Q_4, Q_5, Q_6 — соответствующие моменты. Этим оправдано предположение (3) для случая (5), т. е. для случая ускорения тела из состояния покоя.

Когда движение сводится только к *поступательному*, координаты (q_1, q_2, q_3) могут быть использованы *в большом*. Тогда $T_{ij}(\mathbf{q}) = T_{ij}(0)$, т. е. *постоянные*, и, таким образом, из формулы (3) следует соотношение

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = T_{ij}\ddot{q}_j, \qquad [i, j = 1, 2, 3]. \tag{9}$$

Отсюда видно, что парадокс Даламбера (§ 7) возникает уже из-за принятия предположения (3), и это заставляет нас вспомнить, что наша модель в общем не соответствует физической действительности. Более сложным оказывается исследование *моментов* и вообще величин, характеризующих вращение при наличии поступательного движения (см. § 111—112).

Выведенные выше формулы относятся к «присоединенной» массе. Очевидно, что *кажущаяся масса*, определяемая как сумма собственной массы находящегося в жидкости (твердого) тела Σ и присоединенной массы, представляется другим симметричным тензором (матрицей), обладающим в точности теми же свойствами.

§ 102. Геометрические фигуры частных видов; тело Рэнкина [1])

Коэффициенты присоединенной массы были подсчитаны теоретически не только для сферы, но и для тел простой геометрической формы. Обычно их приводят в безразмерном виде, выражая их через отношение k присоединенной массы ко всей массе, равной произведению плотности ρ на объем (Σ) вытесненной жидкости.

Многие результаты, полученные различными авторами, приведены в книге Ламба [7]. Эллиптические цилиндры в случае поступательного движения и вращения рассматриваются в [7], § 71 и § 105—107; сфероиды и эллипсоиды — в [7], § 105—107 и § 113—116; пара сфер — в [7], § 113—116.

Можно также вычислить присоединенную массу различных других «двумерных» фигур (цилиндров, движущихся параллельно своей оси). Так, Тейлор [2]) подсчитал величину k для различных многоугольников и параболических двуугольников. Различные авторы [3]) рассматривали также круги и эллипсы с симметрично расположенными стабилизаторами с целью исследовать стабилизирующее действие, которое оказывают на летательный аппарат рулевые поверхности.

---

[1]) Многие из результатов, приведенных в этом параграфе и в других параграфах этой главы, можно найти в работах Л. И. Седова [25*] и [27*]; см. также Риман И. С., Крепс Р. Л., Присоединенные массы тел различной формы, Тр. ЦАГИ № 635, 1947 г. — *Прим. ред.*

[2]) Taylor J. L., *Phil. Mag.*, **9** (1930), 161—183. Случай параллельных пластинок см. Рябушинский Д., Proc. Int. Math. Congress, Strasbourg (1920), 568—585; см. также Bickley W. G., *Phil. Trans.*, **A228** (1929), 235—274 и *Proc. Lond. Math. Soc.*, **37** (1934), 82—105 и Seth B. N., Publ. Lucknow Univ. (1938—1939).

[3]) Kuerti G. и др., *Navord Rep.* **2295** (1952); Bryson A. E., *J. Aer. Sci.*, **20** (1953), 297—308 и **21** (1954), 424—426; Summers R. C., там же, **12** (1953), 856—857, ср. с формулой (22).

Из других осесимметричных тел, для которых аналитически найдена присоединенная масса, можно назвать тор, сферические луночки и «линзы», ограниченные соосными сферическими сегментами [1]). В случае сфер были исследованы и слабо деформированные сферы.

Можно также рассмотреть *тела Рэнкина* — твердые тела вращения, которые при обтекании равномерным потенциальным потоком параллельно оси x_1 эквивалентны системе источников и стоков, размещенных на этой оси. Мы рассмотрим сейчас подобные тела Рэнкина в порядке обобщения результатов Макса Мунка и Дж. Тейлора [2]).

Первый шаг заключается в том, что к выражению $U\nabla x_1 - x_1\nabla U$ применяется второе тождество Грина с учетом того, что $\nabla^2 U = \nabla^2 x_1 = 0$. Итак, если S'' — большая сфера, содержащая Σ, а R — область между поверхностью S тела Σ и сферой S'', то, полагая $U^h = U$, мы получаем из формулы (8)

$$T_{1h} = \rho \int_S \int U\left(\frac{\partial x_1}{\partial n}\right) dS = \\ = \rho \int_S \int x_1 \frac{\partial U}{\partial n}\, dS - \rho \int_{S''} \int \left(x_1 \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial x_1}{\partial n}\right) dS; \qquad (10)$$

причем $-\partial/\partial n = \partial/\partial r$ на сфере S''. Интегралы по сфере S'' можно легко оценить асимптотически, если воспользоваться представлением

$$-U = \sum \frac{\mu_i x_i}{r^3} + O(r^{-3}), \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 2\sum \frac{\mu_i x_i}{r^4} + O(r^{-4}). \qquad (11)$$

Так как площадь сферы S'' равна $4\pi r^2$, членами $O(r^{-3})$ соответственно $O(r^{-4})$ в формуле (10) можно пренебречь. В силу симметрии отпадают слагаемые, содержащие μ_2, μ_3. Чтобы оценить остаток, мы воспользуемся сферическими координатами,

---

[1]) Относительно тора см. Hicks W. M., *Phil. Trans.*, **172** (1881), 609 и Dyson F. W., там же, **184** (1892), 42. О сферических луночках см. Bassett A. B., *Proc. Lond. Math. Soc.*, **16** (1885), 286. Относительно линз см. Shiffman M. and Spencer D. C., *Quar. Appl. Math.*, **3** (1947), 270—288; Payne L. E., там же 10 (1952), 197—204. По поводу почти сферических тел см. Szego G., *Duke Math. J.*, **16** (1949), 209—223; также Plana, *Mem. accad. sc. Torino*, **38** (1835), 209.

[2]) *NACA Tech. Notes*, 104—106 и [83]; см. также [7], § 121а; Tollmien W., *Ing.-Archiv*, **9** (1938); Landweber L., *Quar. Appl. Math.*, **14** (1956), 51—56 и *J. Fluid Mech.*, **1** (1956), 319—336.

положив $x_1 = r\sin\varphi$, $dS = 2\pi d\,(\sin\varphi)$. Интеграл по сфере S'' с точностью до $O(r^{-1})$ равен величине

$$2\pi\mu_1\rho\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\{2\sin^2\varphi+\sin^2\varphi\}\,d\,(\sin\varphi)=2\pi\rho\mu_1\left[\sin^3\varphi\right]_{-1}^{1}=4\pi\rho\mu_1.$$

Поэтому, переходя к пределу при $r\to\infty$, мы получим соотношение

$$T_{1h}=T_{h1}=4\pi\rho\mu_1^h-\rho\int\int x_1\left(\frac{\partial U^h}{\partial n}\right)dS, \tag{12}$$

где μ_1^h есть момент диполя величины U^h для направления x_1. Заметим, что вывод формул (10) — (12) справедлив для *любой* функции U, регулярной на бесконечности и удовлетворяющей условию $\int\int_{S''}(\partial U/\partial n)\,dS=0$.

Мы получили обобщение результата Тейлора [83], который рассматривал случай $h=1$. В этом случае $(\partial U^1/\partial n)\,\partial S$ есть dS_1, и интегрированием по частям по внутренней области Σ поверхности S мы находим, что $\int\int x_1\,dS_1=\int\int\int dR$ представляет собой объем тела Σ. Поэтому можно записать равенство

$$T_{11}=4\pi\rho\mu_1^1-\rho\cdot\text{объем}\,(\Sigma). \tag{12'}$$

Наличие величины объема тела Σ в формуле (12′) Тейлор объяснил тем, что заполненная жидкостью полость в Σ при поступательном движении увеличивает его присоединенную массу на величину, равную произведению ρ на объем полости, не изменяя дипольного момента U^1 на бесконечности.

Он также отметил, что в случае *тела Рэнкина* $\mu_1^1=\sum x_1^{(k)}e_k$. Следовательно, при поступательном движении вдоль оси x_1 присоединенная масса равна произведению момента диполя, определяющей тело системы источников и стоков, на величину $4\pi\rho$ минус масса вытесненной жидкости.

Формула для сферы, когда $\mu_1^1=a^3/2$, как в § 98 формула (1), является частным случаем выражения

$$T_{11}=2\pi\rho a^3-\rho\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right)=\frac{2\pi\rho a^3}{3}.$$

Случаю вытянутого сфероида вращения соответствует линейное распределение источников между фокусами.

§ 103. Теория и эксперимент

Хотя мы начали с теоретического рассмотрения, но явление присоединенной массы впервые было открыто экспериментально. В 1776 г. Дюбуа[1]) наблюдал его влияние на период малых колебаний сферического маятника. Измеренные им значения k лежат в интервале 0,45—0,67.

В то время систематическое и точное определение периода колебаний маятников имело большое научное и практическое значение. Желательно было точно знать, чему равно g и каковы его аномалии, а для определения долготы во время длительных морских путешествий требовались хорошие хронометры. В пустоте мы имеем $ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta$, стало быть, g связано с периодом τ малых колебаний маятника длины l формулой $g = 4\pi^2 l/\tau^2$. Но необходимы поправки как на влияние воздуха, окружающего маятник, так и на трение в системе подвеса.

Очевидно, что из-за подъемной силы восстанавливающая сила $mg\sin\theta$ маятника плотности ρ уменьшается в отношении $1 - (\rho'/\rho)$, где ρ' — плотность воздуха. Благодаря очень точным измерениям Бейли[2]) было выяснено, что эта поправка, доходящая примерно до $5/\rho$ минут в день, является недостаточной. Отсюда ясно, какое большое значение имел результат Пуассона и Грина, что m в левой части уравнения маятника нужно заменить на «кажущуюся массу» m^*, что увеличивает величину τ в отношении $1:[1 + (m'/m)]^{1/2}$. Такое вычисление a priori значения $m' = m^* - m$ для сферического маятника было поразительным результатом.

Однако точные измерения выявили то обстоятельство, что наблюдаемые значения $m' = k\rho \cdot$ объем (Σ), полученные по измененному уравнению маятника $(m + m')l\ddot{\theta} = m[1 - (\rho'/\rho)]\sin\theta$, систематически превышали значения, найденные по формулам Пуассона и Грина.

Это систематическое расхождение Стокс ([13], т. 3, стр. 1—101) объяснял влиянием *вязкости*. Его соображения будут конспективно изложены в § 115; из них следует, что указанная разность значений пропорциональна числу Стокса $S = \nu^{1/2}/\omega^{1/2}a$, где ω — частота, а a — радиус сферы. Стокс получил также вязкое *затухание*, которое в обычных условиях тоже пропорционально S.

Отсюда следует, что *при быстрых колебаниях малой амплитуды, когда S мало,* теория идеальной жидкости должна доста-

[1]) DuBuat, Principes d'hydraulique, 3-е изд., Paris, 1816, 221—251 (первое издание — в 1776 г.). Обзор более ранних работ см. в [13], т. 3, стр. 76—122 или в [79], стр. 97—101.

[2]) Baily F., *Trans. Roy. Soc., London* (1832), 399—492.

точно хорошо согласовываться с наблюдениями. И действительно, многие эксперименты [1]) показали хорошее согласование с теорией. К сожалению, амплитуды при этом обычно не измерялись, а погрешности эксперимента часто были одного порядка с поправкой на вязкость. Данные Бесселя, по-видимому, занимают особое место; некоторые побочные эффекты в этих опытах были проанализированы Стоксом ([13], т. 3, стр. 112).

Было установлено также, что вдали от всех твердых границ движение жидкости *при ускорении из начального состояния покоя* на протяжении примерно диаметра хорошо согласуется с теорией идеальной жидкости. Однако, после того как сфера подвинется на несколько диаметров, наблюдается отрыв потока (отделяется вихревой слой), и тогда стационарное значение C_D становится более важным [2]). Еще скорее это происходит при ускоренном движении диска перпендикулярно к его плоскости [3]); этого и следовало ожидать, так как острая кромка благоприятствует отрыву. Вообще говоря, тенденция к отрыву зависит от величины полного перемещения, выраженной в диаметрах; так, при периодическом движении она зависит от $U_{\max}\tau/d$, где τ — период.

§ 104. Коэффициенты устойчивости

При исследовании устойчивости стационарного движения в воде многих типов тел были использованы в соответствующем оформлении идеи, подсказываемые лагранжевыми формулировками (§ 99, 100). Если эти формулировки применимы, то можно подставить формулу (2) в соотношение (3), чтобы получить следующее уравнение:

$$Q_l = \sum T_{lj}(\mathbf{q})\,\ddot{q}_j + F_l(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}}), \tag{13}$$

где F_i выражаются формулой

$$F_l = \sum \Gamma_l^{jk}(\mathbf{q})\,\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{13'}$$

[1]) Laird L. H., *Phys. Rev.*, **7** (1898), 102—105; Krishnayar S., *Phil. Mag.*, **46** (1923), 1049—1053; Yu Y. T., *J. Appl. Phys.*, **13** (1942), 66—69 и **16** (1945), 727—729; Stelson T. H., Thesis Ph. D., Carnegie Inst. Tech. (1952). См. также предыдущие ссылки, а также примечания к § 104—115.

[2]) Cook G., *Phil. Mag.*, **39** (1920), 350—382; Hirsch P., *ZAMM*, **3** (1923), 93—107; Bagliarello G., *Ric. Sci.*, **26** (1956), 437—461. О вычислении расстояний, на которых происходит отрыв потока, см. Tollmien H., *Handbuch Exp. Phys.*, **4** (1931), ч. 1, 272—279; Goldstein S., Rosenhead L., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32** (1936), 392—401.

[3]) Luneau J., *C. R. Paris*, **227** (1948), 823—825 и **229** (1949), 227—228; Iverson H. W., Balent R., *J. Appl. Phys.*, **22** (1951), 324—328; в пяти случаях наблюдалось теоретическое k.

а $\Gamma_l^{jk} = (\partial T_{ij}/\partial q_k + \partial T_{ik}/\partial q_j - \partial T_{jk}/\partial q_i)/2$ суть компоненты тензора Кристоффеля ([76], стр. 39). Кроме того, входящие в эти формулы функции в принципе можно, как утверждал Лагранж (§ 1), определить *a priori* при помощи теории потенциала.

На практике предполагается известным лишь *вид* уравнений (13) и (13′), причем формула (13′) фактически соответствует принятию «инерциального моделирования» (§ 70). Указанные уравнения применяются обычно только к малым возмущениям стационарного движения, что позволяет считать T_{ij} и Γ_l^{jk} в уравнениях (13) и (13′) постоянными величинами. Эти постоянные (подобно C_D, C_L и др.) обычно определяют *эмпирически* — так, чтобы они соответствовали данным наблюдения; эмпирические константы, определяемые таким образом, называются *коэффициентами устойчивости.*

Во время первой мировой войны такие коэффициенты использовались, например, для исследования устойчивости вращающихся снарядов [1]). В настоящее время они применяются к анализу устойчивости полета ракет и управляемых снарядов; случай снарядов со стабилизатором гораздо проще для изучения.

Чрезвычайно важно и хорошо разработано их применение к анализу устойчивости полета самолетов. Тесно связан с этим анализ устойчивости движения дирижаблей (и подводных лодок). В этих случаях особенно большую роль играет инерция воздуха (воды), в котором находится движущееся тело. См. [45*].

Вдохновляемые идеями Лагранжа, различные авторы пытались вычислять коэффициенты устойчивости исходя из *априорных* соображений. Хотя для дирижаблей и подводных лодок удалось добиться некоторых успехов, эксперименты показали, что в действительности присоединенная масса при стационарном движении испытывает значительные изменения. Соответствующие вычисления коэффициентов устойчивости для самолетов гораздо труднее: нужно учитывать циркуляцию и распределение вихрей; большие сомнения вызывает использование условия Жуковского. Мы отсылаем читателя за подробностями к технической литературе [2]).

---

[1]) Fowler, Gallop, Lock, Richmond, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A221 (1920), 295—387 и A222 (1922), 227—247; см. McShane E. Y., Kelley J. L., Reno F. V., Exterior ballistics, Denver, 1953.

[2]) Обзоры вместе с библиографией дали Reissner E., *Bull. Am. Math. Soc.*, 55 (1949), 825—850 и Garrick I. E., *Appl. Mech. Revs*, 5 (1952) 89—91; см. также Scruton W. R., Aer. Res. Comm. Rep., 1931. Относительно дирижаблей см. Cowley, Levy, Frazer, Relf, Jones, Adv. Comm. Aer., Tech. Rep., 1918, 1919, стр. 95—127; Szebehely V., Proc. Sec. Nat. Congr. Applied Mech. USA (1954), 771—776.

На практике кажущейся массой интересуются также в связи с тем влиянием, которое она оказывает на собственные частоты колебаний *корабля,* равно как и на частоты бортовой и килевой качки. В первом случае влияние свободной поверхности легко оценить. В виду относительно большой частоты можно положить при этом $U = 0$. В других случаях влияние образующихся на поверхности волн учесть сложнее. И на этот раз мы отсылаем читателя к литературе [1]). По-видимому, мало имеется систематических знаний относительно зависимости коэффициентов устойчивости от числа Фруда.

Наконец, многие авторы применяли понятие кажущейся массы для оценки ударных сил при посадке гидроплана на воду при входе снарядов в воду и другие жидкости. Краткое резюме по этому вопросу приведено в работе [17] [2], стр. 243—250.

Хотя дедуктивная теория § 99—102, строго говоря, не применима ни к одному из приведенных примеров, все же в каждом из них понятие тензора присоединенной массы оказалось плодотворным.

§ 105. Присоединенная масса и количество движения

В большинстве приложений влияние присоединенной массы сочетается с воздействием многих других факторов, в исследовании которых заинтересованы только специалисты. Поэтому мы сейчас вернемся к чистой теории кажущейся массы — теории, привлекательной и с эстетической и с математической точек зрения. Но прежде чем перейти к более абстрактным рассмотрениям, (§ 108—112), мы приведем несколько частных результатов, которые помогут уяснить смысл вводимых нами абстракций.

Составляющие тензора присоединенной массы наиболее удовлетворительно определяются посредством интегралов кинетической *энергии* подобно формулам (2) и (4). Эти интегралы *сходятся* на бесконечности, так как (§ 7) $\nabla U = O(r^{-3})$ в пространстве. В случае плоских течений Дирихле интеграл кинетической энергии также сходится на бесконечности: и в этом случае интеграл $\iint (\nabla U \nabla U)\, dx\, dy = O\left(\int r^{-4} r\, dr\right)$ конечен.

[1]) Nicholls H. W., *Trans. Inst. Nav. Arch.,* (1924), 141—163; Lewis F. M., *Trans. Nav. Arch. Mar. Eng.,* **37** (1929), 1—18; Moullin E. B., *Proc. Camb. Phil. Soc.,* **24** (1928), 400—413 и 531—558; Brown A. D. и др., там же, **26** (1930), 258—262; Weinblum G., *Schiffbau,* **32** (1931), 488—495; 509—511 и 525—529; Хаскинд М. Д., *Изв. АН СССР* (1946), 23—34 и *ПММ,* **10** (1946), 475—480; Wendel K., *Jahr. der Schiffsbau Ges.,* **44** (1950), 207—255.

[2]) Первая задача о присоединенной массе плавающего тела была решена Н. Е. Жуковским [28*]. Современное состояние вопроса см. в работах [7*], [17*], [26*—33*]. — *Прим. ред.*

Сейчас мы будем интерпретировать T_{hk} как интегралы количества движения. Различные авторы отмечали [1]), что интегралы количества движения расходятся в обычном смысле. Поэтому при интерпретации величин T_{hk} с помощью количества движения нужно соблюдать осторожность. А теперь рассмотрим это подробнее.

Коэффициенты T_{hk} из формулы (8) представляют собой интегралы, взятые по границе S тела Σ, и в новых обозначениях их можно записать в виде

$$T_{hk} = \rho \int_S \int U \, dS_{\mathbf{K}}, \tag{14}$$

где $U = U^h$ — гармоническая функция и $dS_K = \sum_{i=1}^{3} K_i \, dS_i$ выражает дифференциал потока векторного поля $\mathbf{K} = (K_1(\mathbf{x}), K_2(\mathbf{x}), K_3(\mathbf{x}))$ через S. Так, в случае переносов, параллельных оси x_1, $\mathbf{K} = (1, 0, 0)$; в случае поворотов вокруг оси x_1 получим $\mathbf{K} = (0, x_3, -x_2)$ и т. д. Посредством этого удобного обозначения определяется полезный класс интегралов Стильтьеса по поверхностям при условии, что интеграл $\int\int |dS_{\mathbf{K}}|$ конечен. Заметим, что всегда, когда $\mathbf{K}$ есть поле скоростей твердого тела, $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$. Это условие и еще то, что U есть гармоническая функция, регулярная на бесконечности ([4], стр. 217), — вот и все, что нам потребуется для дальнейших выводов.

Определим «$\mathbf{K}$-линию» как интегральную кривую системы $dx_i/dt = K_i(\mathbf{x})$, или $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{K}(dx_i = K_i dt)$. Таким образом, если $\mathbf{K}$ соответствует поступательному движению параллельно оси x_1, то $\mathbf{K}$-линии суть прямые, параллельные этой оси; если $\mathbf{K}$ соответствует винтовому движению относительно оси x_1, то $\mathbf{K}$-линии представляют собой винтовые линии вокруг этой оси и т. д. Теперь к векторному полю $U\mathbf{K}$ над областями R, ограниченными поверхностями $S \cup S' \cup S''$, где S'' состоит из $\mathbf{K}$-линий, мы применим теорему о дивергенции. Так как $dS_{\mathbf{K}} \equiv 0$ на поверхности S', состоящей из $\mathbf{K}$-линий, и так как

$$\operatorname{div}(U\mathbf{K}) = K_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + U \operatorname{div} \mathbf{K},$$

то, пользуясь равенством $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$, мы получаем из формулы (14) следующее соотношение:

$$T_{hk} = \rho \int_P \int \int \left(K_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) dR - \rho \int_S \int U \, dS_{\mathbf{K}}. \tag{14'}$$

[1]) [7], 119; Tollmien H., *ZAMM*, **18** (1938), 154.

Показанные здесь знаки перед двойным и тройным интегралами верны, если нормали направлены *внутрь* области R. В частности, если R — *бесконечная* область и поверхность S' отодвигается на бесконечность и если интеграл в области R сходится, то получим формулу

$$T_{hk} = \rho \int\int_{R} \int \left(K_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) dR. \qquad (14^*)$$

Теперь рассмотрим различные случаи, соответствующие частным значениям коэффициентов в выражении для присоединенной массы.

Если $k = 1$, то $\mathbf{K} = (1, 0, 0) = \operatorname{grad} x_1 = \nabla x_1$ в зависимости от обозначений. Пусть S'' есть бесконечно длинный *цилиндр*, ось которого параллельна оси x_1 и который содержит тело Σ. Тогда, поскольку интеграл от количества движения

$$T_{h1} = T_{1h} = \rho \int_{S} \int U^h \, dx_2 \, dx_3 = \rho \int\int_{R} \int \left(\frac{\partial U^h}{\partial x}\right) dR \qquad (15а)$$

сходится на бесконечности, мы получаем следующий результат. *Коэффициенты в выражении для присоединенной массы, соответствующие поступательному движению параллельно оси x_1, равны составляющей по x_1 количества движения жидкости внутри любого бесконечного цилиндра, соосного с x_1 и содержащего тело Σ при движении с единичной скоростью в направлении h.* Область R проще всего брать в виде цилиндра, описанного вокруг тела Σ. Этот результат применительно к величине T_{11} получил Теодорсен [84].

Далее, если $k = 4$, то $\mathbf{K} = (0, x_3, -x_2) = x_3 \nabla x_2 - x_2 \nabla x_2$. Пусть S'' ограничивает любое *твердое тело вращения*, которое содержит тело Σ и для которого ось x_1 есть ось симметрии. Тогда граница $S \cup S''$ области R состоит из поверхности S и из $\mathbf{K}$-линий (кругов), так что формула (14*) сводится к виду

$$T_{h4} = \rho \int\int_{R} \int \left(x_2 \frac{\partial U^h}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial U^h}{\partial x_2}\right) dR = \rho \int\int_{R} \int \left(\frac{\partial U^h}{\partial \theta}\right) dR, \qquad (15б)$$

где $\theta = \operatorname{arc\,tg} x_3/x_2$. Следовательно, T_{h4} — *момент количества движения* относительно оси x_1 жидкости, находящейся в области R.

С помощью циклической перестановки осей из (15а) и (15б) можно легко получить остальные величины T_{hk}. Случай *винтового движения* вокруг оси x_1, когда $\mathbf{K} = \alpha \nabla x_1 + \beta(x_2 \nabla x_3 - x_3 \nabla x_2)$, легко получить суперпозицией двух предыдущих формул. Пусть поверхность S'' — *круговой цилиндр*, описанный во-

круг тела Σ. Тогда присоединенная масса равна количеству винтового движения жидкости, находящейся внутри поверхности S'', а именно $\rho \int\int (\alpha\, \partial U^h/\partial x_1 + \beta\, \partial U^h/\partial\theta)\, dR$; то же самое верно для всех цилиндров, соосных с x_1 и содержащих тело Σ.

§ 106. Другие интерпретации

Совсем недавно Ч. Дарвин [1]) дал новую и очень простую интерпретацию теоретической присоединенной массы твердого тела, введя представление о *дрейфе*, т. е. о смещении поперечной поверхности жидкости, вызываемом поступательным движением тела Σ из $-\infty$ в $+\infty$ вдоль данной оси. Он показал, что *присоединенный объем* μ_1/ρ, определяемый как отношение величины присоединенной массы при поступательном движении к плотности жидкости, равен объему, заключенному между начальным и конечным положениями любой такой поверхности.

В случае *плоско-параллельного* обтекания некоторой плоской области Σ можно дать другую, совсем простую интерпретацию в терминах конформного отображения:

$$z' = az + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots, \qquad a > 0, \tag{16}$$

переводящего внешность единичного круга на внешность области Σ. Как уже отмечалось в § 8, имеется одно и только одно такое преобразование. Заметим, что если V есть функция тока, то дифференциал $(\nabla V \cdot \nabla V)\, dx\, dy$ кинетической энергии сохраняется при конформном отображении и скорость на бесконечности изменяется при этом в отношении $1 : a$. С другой стороны, функция V из уравнения $V + u_\infty y = \phi$ удовлетворяет краевому условию $V = 0$ на Σ.

Непосредственная асимптотическая оценка, учитывающая эти данные ([86], стр. 204), показывает, что в случае течений, параллельных оси x_1, присоединенная масса M_{11} тела Σ удовлетворяет уравнению [2])

$$M_{11}/\rho + \text{площадь}(\Sigma) = 2\pi a^2 [1 - \mathrm{Re}\,(c_1)]. \tag{17}$$

Формулой (17) задача вычисления присоединенной массы сводится к задаче конформного отображения.

Другой интересный результат — это теорема Пойа о том, что из всех плоских областей, имеющих данную площадь, круглый диск обладает наименьшей усредненной присоединенной массой

[1]) *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49** (1953), 342—354; см. также Lighthill M. Y., J. *Fluid Mech.*, **1** (1956), 31—53 и 311—312.

[2]) В [7*] даны выражения для всех коэффициентов присоединенных масс. — *Прим. ред.*

(усредненной по всевозможным ориентациям). Аналогичный результат для сфер в пространстве недавно получил Шиффер [1]).

Наконец, имеется замечательный результат, выявляющий связь понятия присоединенной массы с теорией струй, рассмотренной в гл. III. Как впервые доказал Рябушинский, в семействе границ, охватывающих один и тот же объем (или, в случае плоских течений, — одну и ту же площадь), *экстремальное значение присоединенной массы дают свободные границы*. Относительно вывода и применений этой теоремы мы отсылаем читателя к [17], стр. 85—89 и 177—184.

§ 107. Каноническая форма

Как уже пояснялось в § 101, тензор кажущейся массы тела Σ зависит от выбора осей координат, связанных с телом, и изменяется с изменением положения тела относительно некоторого заданного начального положения отсчета $\mathbf{q} = 0$. Случай сферы весьма прост. Если оси проходят через центр сферы, то в обозначениях из § 100 справедливы равенства

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = m^*, \quad T_{44} = T_{55} = T_{66} = 2ma^2/5,$$

а все T_{ij} вне главной диагонали $[i \neq j]$ равны нулю.

Другой известный частный случай — это твердое тело в *пустоте*. Если за начало координат взять центр тяжести, то все T_{ij} $[i \neq j$ и $i, j = 1, 2, 3]$ обратятся в нуль, а $T_{11} = T_{22} = T_{33} = m$, где m — масса тела. Далее, приняв главные оси инерции в качестве декартовых осей координат, мы можем обратить в нуль все $T_{ij} (i \neq j$ и $i, j = 4, 5, 6)$. Следовательно, тензор инерции определяется четырьмя скалярными величинами T_{11}, T_{44}, T_{55}, T_{66}, которые путем изменения единиц длины и времени можно свести к *двум*. Затем, $T_{44} + T_{55} \geqslant T_{66}$ и т. д. при циклической замене индексов; случай эллипсоида является вполне общим.

В двух указанных случаях матрица $\|T_{ij}\|$ приводится к диагональной форме с помощью надлежащего выбора осей координат. Представляет интерес выяснить, насколько можно упростить матрицу инерциальных коэффициентов T_{ij} при помощи надлежащего выбора декартовой системы координат и центральной точки [2]) для общего случая жидкости с положительной плотностью. Это представляет собой простое упражнение по теории квадратичных форм.

---

[1]) Polya G., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **33** (1947), 218—221; Schiffer M., *Comptes Rendus*, Paris, **244** (1957), 3118—3121.

[2]) Относительно центральной точки см. [34*]. По вопросу об упрощении матрицы инерциальных коэффициентов см. [25*]. — *Прим. ред.*

На примере весла (§ 98) видно, что кажущаяся инерция может быть различной при поступательном движении в различных направлениях; гораздо легче создать ускорение, рассекая веслом воду, чем загребая. Однако так как всякая квадратичная форма эквивалентна [1]) относительно группы вращений диагональной форме, то мы всегда можем повернуть оси так, чтобы получить $T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0$, причем величины T_{11}, T_{22}, T_{33} будут соответствовать «главным направлениям» поступательного движения.

За исключением случая вырождения (случай невесомой тонкой пластинки), когда одна из величин T_{ii} $[i = 1, 2, 3]$ обращается в нуль, возможно дальнейшее упрощение надлежащим выбором начала координат в центральной точке. Пусть w_1, w_2, w_3 обозначают вращения со скоростью один радиан в секунду относительно некоторой системы осей, параллельных главным направлениям поступательного движения; пусть X, Y, Z обозначают перемещения в главных направлениях при единичной скорости, и пусть w_1', w_2', w_3' обозначают вращения относительно осей, смещенных на вектор (x, y, z). Тогда

$$\begin{aligned} w_1' &= w_1 + yZ - zY, \\ w_2' &= w_2 + zX - xZ, \\ w_3' &= w_3 + xY - yX. \end{aligned} \tag{18}$$

Подстановка w_1' вместо w_1 не изменяет T_{14} — энергию взаимодействия между X и w_1, поскольку энергия взаимодействия между X и Y или Z равна нулю. С другой стороны, при этом величина $T_{15} = T_{51}$ увеличивается на zT_{11}, величина $T_{16} = T_{61}$ — на xT_{22}, а величина T_{24} уменьшается на zT_{22} и т. д.

Поэтому надлежащим выбором z можно добиться равенства $T_{15} = T_{24}$ и аналогично получить $T_{16} = T_{34}$ и $T_{26} = T_{35}$. Таким образом, *матрицу инерциальных коэффициентов можно привести* к упрощенной форме, которая указана на рис. 27.

В эту каноническую форму входят *пятнадцать произвольных постоянных,* число которых можно свести к тринадцати, изменив масштаб длины и времени. Итак, общий случай характеризуется *тринадцатью* безразмерными отношениями и двумя преобразованиями единиц измерения.

Если тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, как эллипсоид, то их можно взять в качестве коор-

[1]) Используемые здесь алгебраические теоремы доказаны, например, в [45], гл. IX, теорема 21. По поводу самих результатов см. [7], § 126; общий случай рассмотрел Clebsch, *Math. Annalen,* 3 (1870), 238. Относящиеся сюда другие результаты см. Morgan G. W., *Quar. Appl. Math.,* 12 (1954). 277—285.

динатных плоскостей. Отражение, скажем, в плоскости (x, y) оставляет Z, w_1, w_2 неизменными, но меняет знак на противоположный у X, Y, w_3; кинетическая энергия при этом не изменяется. В силу этого $T_{13} = -T_{31} = 0$, и аналогично

$$T_{32} = T_{36} = T_{41} = T_{42} = T_{46} = T_{51} = T_{52} = T_{56} = 0.$$

Повторяя это рассуждение для других координатных плоскостей, мы видим, что матрицу инерциальных коэффициентов

Перенос			*Вращение*		
α	0	0	ρ	ξ	η
0	β	0	ξ	σ	ζ
0	0	γ	η	ζ	τ
ρ	ξ	η	T_{44}	T_{45}	T_{46}
ξ	σ	ζ	T_{45}	T_{55}	T_{56}
η	ζ	τ	T_{46}	T_{56}	T_{66}

Рис. 27.

можно диагонализировать. Таким образом, у нас остаются *шесть* произвольных постоянных и *четыре* безразмерных отношения (их только два в случае твердого тела в вакууме).

Другой интересный случай — симметрия относительно трех взаимно перпендикулярных осей, но без симметрии относительно плоскостей, проходящих через эти оси. Типичным примером является винтовая линия: $x = r\cos z$, $y = r\sin z$, $|r| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 2\pi$.

В силу симметрии относительно оси z остаются неизменными Z, w_3, но меняется знак на противоположный у величин X, Y, w_1, w_2. Поэтому, как и выше, получаем равенства

$$T_{13} = T_{23} = T_{43} = T_{53} = T_{16} = T_{26} = T_{46} = T_{56} = 0.$$

Повторив это рассуждение для других координатных плоскостей, мы видим, что, кроме «винтовых произведений инерции» ρ, σ, τ, все коэффициенты, стоящие вне главной диагонали, обращаются в нуль. Таким образом, здесь мы имеем *девять* коэффициентов инерции, и при помощи изменения масштабов длины и времени их можно свести к *семи* существенно независимым параметрам.

Приведенные выше рассуждения можно равным образом применить к тензору присоединенной массы, хотя, вообще го-

воря, главные оси будут при этом другими, если только они не являются осями симметрии. Мы рассматривали тензор кажущейся массы с целью включить сюда известный случай твердого тела *в пустоте* в качестве частного [1]).

§ 108. Геометрическая интерпретация

Теперь мы будем трактовать теорию кажущихся масс как раздел чистой геометрии. Начнем с того результата из § 100, 101, что система, состоящая из твердого тела Σ в идеальной жидкости, *есть инерциальная лагранжева система* с кинетической энергией, равной $T = \frac{1}{2} T_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$. Отсюда можно легко вывести классический результат [2]), заключающийся в том, что «естественные» траектории, получающиеся при отсутствии внешних сил, представляют собой *геодезические линии*. В частности, $Q = 0$ в формуле (3) тогда и только тогда, когда $\int T\,dt$ принимает минимальное значение. Это очевидное следствие из уравнений Эйлера представляет собой простейший случай принципа наименьшего действия — вариационной формулировки динамических задач.

Точнее, пространство «конфигураций» $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_6)$ нашей системы есть риманово многообразие с «длиной дуги»

$$ds^2 = \sum T_{ij}(\mathbf{q})\, dq_i\, dq_j. \tag{19}$$

Кроме того, поскольку энергия не изменяется, ds/dt есть величина постоянная, и поэтому как $\int T\,ds$, так и $\int T\,dt$ принимают экстремальные значения (локальный минимум). Эти положения легко проверить на известных примерах.

Так, если $V = V_2$ есть поверхность без трения $x = x(q_1, q_2)$ в обычном пространстве, мы видим, что реакция связи перпендикулярна поверхности V_2; поэтому при отсутствии внешних сил нормаль к траектории частицы служит нормалью к V_2; как известно, это условие характеризует геодезические линии. В более общем случае рассмотрим произвольную траекторию γ на поверхности V_2. Нормальной к поверхности V_2 составляющей силы реакции обычно пренебрегают. Остается сила в плоскости, касательной к поверхности V_2. Она разлагается на две составляющие: на составляющую s, *касательную* к γ, которую можно вы-

[1]) Относительно материала § 107 см. [30].

[2]) Герц Г., Принципы механики, М., 1959; [76], § 100; Synge J. L., *Phil. Trans.*, **A226** (1926), 31—106.

числить по формуле $\ddot{s} = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2$, используя выражение $T = \frac{1}{2}\sum \dot{x}_k^2$, и на составляющую, *нормальную* к γ в плоскости, касательной к поверхности V_2, равную произведению геодезической кривизны на $v^2 = \dot{s}^2$.

Аналогичные формулы справедливы во всяком римановом пространстве V. В частности, Q преобразуется как (контравариантный) *вектор*, а ее нормальная составляющая равна произведению вектора геодезической кривизны на v^2. Следовательно, задачи *динамики* инерциальных лагранжевых систем эквивалентны *геометрическим* задачам.

§ 109. Доказательство того, что система является лагранжевой

Теперь для трехмерного тела ограниченного объема мы докажем справедливость предположения, что обобщенные силы Q_i, определяемые вариационными уравнениями Лагранжа (3), действительно являются компонентами Q^{*i} результирующего давления или соответственно момента силы давления в обычном смысле [1]). Последние, конечно, определяются математически как интегралы по поверхности тела

$$Q_i^* = \int\int pN_i\, dS. \tag{20}$$

Здесь N_i обозначает нормальную составляющую смещения поверхности при поступательном или вращательном движении, соответствующую i-й обобщенной координате, а p определяется из уравнения Бернулли

$$p + \rho\left[\frac{1}{2}\nabla U \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t}\right] = p_0(t) \tag{21}$$

для неустановившегося движения в идеальной жидкости [гл. I, (5)], если, как обычно, пренебречь гидростатическими подъемными силами.

Строгое проведение доказательства затрудняется тем, что полная масса рассматриваемой системы бесконечная, а также бесконечно число измерений «пространства конфигураций» в со-

[1]) Возможность принять уравнения (3) ставили под вопрос Больцман (*Crelle*, т. 73, стр. 111) и Персер; см. также Mises R., *ZAMM*, 4 (1924), 155—181 и 193—213.

ответствии с бесконечностью числа степеней свободы при движении жидкости. Вопросом преодоления этих трудностей занимался лишь Ламб ([82] и [7], § 135, 136), и, как кажется, не совсем успешно [1]). Поэтому мы приведем новое и весьма изящное вариационное доказательство, принадлежащее, с точностью до небольших видоизменений, Дж. Брейквеллу. При изложении этого доказательства мы будем пользоваться выразительной δ-символикой для вариаций, общеупотребительной в динамике, хотя большинство современных авторов, занимающихся вариационным исчислением [2]), предпочитают обычные обозначения дифференциального исчисления.

Мы применим без доказательства две общие теоремы. Первая из них представляет собой тождество Эйлера для первой вариации

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} Q_i \delta q_i(t)\,dt, \tag{22}$$

где Q_i те же, что и в уравнениях (3), и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Вторая теорема заключается в том, что в тождестве (22) возможны все вариации $\delta q_i(t)$, лишь бы они удовлетворяли условиям $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. Это равносильно «голономности» пространства конфигураций для твердого тела. Отсюда следует, что для доказательства тождества $Q_i = Q_i^*$ при сравнении формул (3) и (2) достаточно доказать первое тождество из следующих двух:

$$\int_{t_0}^{t_1} Q_i^* \delta q_i(t)\,dt \stackrel{?}{=} \delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta \int\int\int \frac{1}{2} \nabla U \nabla U\, dm \right\}. \tag{23}$$

Второе тождество становится очевидным, если дифференциал массы dm в формуле (23) записать в виде $\rho\, dR$.

Тождество (23) можно доказать, преобразуя правую часть следующим образом. Наше преобразование допустимо, поскольку, как и раньше, $\nabla U \nabla U = O(1/r^6)$, благодаря чему четырехкратный интеграл по пространству и времени сходится абсолютно, и, следовательно, можно менять порядок интегрирования. Прежде всего, воспользовавшись лагранжевой системой координат, дви-

[1]) Так, рассматриваемые в [82] интегралы не сходятся, а в [7] точный смысл принятых там за основу допущений, как нам кажется, не вполне ясен.

[2]) Morse M., The Calculus of Variations in the Large, New York, 1934; Блисс Дж. А., Лекции по вариационному исчислению, М., 1950.

жущейся вместе с жидкостью, мы непосредственно получаем соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\delta\int\int\int \frac{1}{2}\nabla U\nabla U\, dm\right\} = \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\int\int\int u_i\,\delta u_i\, dm\right\} = \int\int\int dm\left\{\int_{t_0}^{t_1} u_i\,\delta u_i\, dt\right\}, \quad (24)$$

где $u_i = \partial U/\partial x_i$. Интегрируя по частям, для каждой частицы жидкости находим соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} u_i\,\delta u_i\, dt = [u_i\,\delta x_i]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} a_i\,\delta x_i\, dt, \quad (25)$$

где $a_i = du_i/dt$ обозначает ускорение.

Из уравнений движения (гл. I, (2)) следует, что если можно пренебречь гидростатической подъемной силой (§ 21, теорема 1), то $-a_i = \partial p/\rho\partial x_i$, и, следовательно,

$$\operatorname{div}(p\,\delta\mathbf{x}) = \sum \delta x_i\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) + p\operatorname{div}(\delta\mathbf{x}) = \sum \delta x_i\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = -\rho\sum a_i\,\delta x_i, \quad (26)$$

так как $\operatorname{div}(\delta\mathbf{x}) = 0$ для несжимаемой жидкости. Аналогично $\operatorname{div}(U\delta\mathbf{x}) = \sum u_i\delta x_i$. Снова подставим формулу (25) в последнее выражение в формуле (24) и, кроме того, воспользуемся для преобразования (24) формулами (26) и аналогичным ему соотношением. Мы получим следующий результат:

$$\int\int\int dR\,[\operatorname{div}(\rho U\,\delta\mathbf{x})]_{t_0}^{t_1} + \int\int\int dR\left\{\int_{t_0}^{t_2}\operatorname{div}(p\,\delta\mathbf{x})\,dt\right\}. \quad (27)$$

Так как $p = O(1/r^6)$, $\delta\mathbf{x} = O(r)$ и $dR = 4\pi r^2 dr$, четырехкратный интеграл, как и раньше, сходится абсолютно. Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования и затем, применив теорему о дивергенции [1]), получим равенство

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \left[\int_S\int \rho U\,\delta x_n\, dS\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\int_S\int p\,\delta x_n\, dS\right\}. \quad (28)$$

[1]) Чтобы оправдать такое применение, необходимо воспользоваться теоремой Лагранжа о том, что частицы жидкости, соприкасающиеся с твердым

Здесь δx_n обозначает составляющую вектора $\delta\mathbf{x}$, нормальную к общей границе S твердого тела и жидкости. Так как твердое тело и жидкость соприкасаются, то в обозначениях формулы (20) $\delta x_n = \sum N_i \delta q_i$. В частности, $\delta x_n = 0$ в точках t_0 и t_1 и первый член в правой части равенства (28) обращается в нуль, так как $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. Из равенства $\delta x_n = \sum N_i \delta q_i$ мы получим также в силу формулы (20) следующее выражение:

$$\int_S \int p\, \delta x_n\, dS = \sum \int\int pN_i \delta q_i\, dS = \sum Q_i^* \delta q_i.$$

Подставив это в равенство (28), получим соотношение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt = 0 + \int_{t_0}^{t_1} Q_i^* \delta q_i(t)\, dt. \tag{29}$$

Это соотношение доказывает тождества (23), следовательно, $Q_i^* = Q_i$.

§ 110. Однородность

Риманово многообразие V, определяемое формулой (19) по пространству конфигураций твердого тела Σ в бесконечной идеальной жидкости, замечательно тем, что оно обладает простой транзитивной группой «изометрий» (движений твердого тела), оставляющих инвариантным ds. По современной математической терминологии оно является *однородным пространством*. Это объясняется следующим очевидным теоретико-групповым принципом относительности: *относительно рассматриваемого тела все положения эквивалентны*. Формально это можно выразить следующим образом.

Различные положения $\mathbf{q} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ тела в пространстве взаимно однозначно соответствуют различным движениям твердого тела, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, перемещающим тело из фиксированного начального положения отсчета $\mathbf{0}$ в положения $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$. Поэтому мы можем отождествить точки пространства конфигураций с элементами *евклидовой группы* [45, стр. 259]. Кроме того, если α есть некоторое отдельное движение твердого тела, то для наблюдателя в положении $\mathbf{a}$ положение $\alpha\sigma$ представляется точно та-

---

телом, образуют инвариантное множество ([11], т. 1, п. 50). Нужно также отметить, что поверхностные интегралы от $U\delta x_n$ и $p\delta x_n$, взятые по большим сферам, стремятся к нулю, так как $\delta x_n = O\left(\int u\, dt\right) = O(1/r^3)$.

ким же, каким σ представляется наблюдателю в **0**, поскольку все декартовы системы координат эквивалентны. Поэтому «группа переносов» $\sigma \to \alpha\sigma$ не может изменить метрику (19), определяемую кинетической энергией.

Пусть теперь α изменяется: рассматривая V как групповое многообразие евклидовых групп, мы видим, что V имеет «просто транзитивную»[1]) группу «изометрий» (т. е. движений, оставляющих инвариантной метрику ds^2). Подобное многообразие мы будем называть *римановым групповым многообразием*; и мы всегда можем рассматривать изометрии как левые переносы.

Кроме изложенного, можно сделать еще одно теоретико-групповое замечание. «Стационарным движением» в динамике называют движение, которое, если рассматривать его по отношению к осям, связанным с телом, не зависит от времени. Как и в формуле (13), ускорение $\ddot{\mathbf{q}}$ стационарного движения увеличивает значение $Q_i = \sum d(T_{ij}\dot{q}_j)/dt + (\partial T_{hk}/\partial q_i)\dot{q}_h\dot{q}_k$ на величину $T_{ij}\ddot{q}_j$. Следовательно, для того чтобы получить силы при произвольном движении, мы просто можем сложить силы, соответствующие ускорению $\ddot{\mathbf{q}}$ из начального состояния покоя, рассмотренные в § 100—102, и силы, действующие при стационарном движении. Так, если мы хотим определить силы, действующие на твердое тело при его *стационарном движении* в идеальной (т. е. несжимаемой невязкой) жидкости, то мы можем определить силы и при любом движении. Поэтому мы ограничимся задачей определения сил, действующих при стационарном движении.

Хорошо известно[2]), что единственными геометрически возможными стационарными движениями твердого тела в евклидовом пространстве являются поступательное и вращательное движения с постоянной скоростью и винтовое движение с фиксированным шагом и тоже с постоянной скоростью.

По определению, если $\alpha(t)$ — стационарное движение, то смещение σ, необходимое для перехода от $\alpha(t)$ к $\alpha(t+h)$, зависит только от h, т. е. σ есть $\sigma(h)$. Поэтому

$$\alpha(0)\sigma(h+h') = \alpha(h+h') = \alpha(h)\sigma(h') = \alpha(0)\sigma(h)\sigma(h').$$

Сократив в равенстве слева на величину $\alpha(0)$, получим тогда $\sigma(h+h') = \sigma(h)\sigma(h')$; следовательно, перемещения $\sigma(h)$ образуют *однопараметрическую подгруппу* относительно канонических

---

[1]) Под этим подразумевается, что при данных $\sigma, \tau \in V$ существует одно и только одно α, такое, что $\sigma\alpha = \tau$. Мы предполагаем здесь некоторое знакомство с левыми переносами абстрактной группы.

[2]) См., например, Ames J. S., Murnaghan F. D., Theoretical Mechanics, стр. 87.

параметров[1]), а $\alpha(t)$ является ее отображением при изометрии, а именно при групповом переносе $\sigma(t) \to \alpha(0)\sigma(t) = \alpha(t)$.

Кроме того, так как полная кинетическая энергия при стационарном движении постоянна, то, очевидно, $\dot{s} = v$ постоянна в соответствующем римановом многообразии V. Отсюда, согласно § 108, при стационарном движении вектор силы $\mathbf{Q}$ равен произведению вектора геодезической кривизны однопараметрической подгруппы $\sigma(h)$ на постоянную v^2. Следовательно, *сила, действующая на твердое тело при его стационарном движении в идеальной жидкости, пропорциональна вектору геодезической кривизны соответствующей однопараметрической подгруппы евклидовой группы V при надлежащей «лево-инвариантной» метрике в группе V.* А эта лево-инвариантная метрика определяется во всех точках уже рассмотренными в § 100—102 «инерциальными коэффициентами» T_{ij} (0).

§ 111. Сведения из теории групп Ли

Теперь мы выведем формулу для геодезической кривизны однопараметрических подгрупп произвольного риманова группового многообразия. Этот результат, между прочим, представляет интерес и в геометрии групп Ли — это еще одно свидетельство того, что вся математика по существу едина.

Объем книги не позволяет изложить теорию групп Ли достаточно полно, для того чтобы все подробности вывода были ясны. Все же хочется дать достаточно сведений для того, чтобы можно было уяснить себе смысл окончательной формулы, по крайней мере в случае евклидовой группы.

Если твердое тело движется с единичной скоростью параллельно оси x_1, то скорость любой частицы тела равна (1, 0, 0). Поэтому если $F(x_1, x_2, x_3)$ есть произвольная функция, определенная во всем пространстве, то скорость изменения значения этой функции по отношению к такой частице равна $\partial F/\partial x_1$. Оператор $\partial/\partial x_1$, определенный таким образом, называется символом Лагранжа и выражает *бесконечно малое преобразование*, связанное с поступательным движением твердого тела в направлении, параллельном оси x_1.

Если твердое тело вращается с единичной угловой скоростью (один радиан за секунду) вокруг оси x_1, частица с координатами (x_1, x_2, x_3) будет иметь скорость $(0, -x_3, x_2)$. Скорость изменения функции $F(x_1, x_2, x_3)$ относительно данной частицы равна $x_2\partial F/\partial x_3 - x_3\partial F/\partial x_2$. Поэтому бесконечно малое преобразование, связанное с вращением относительно оси x_1, выражается

[1]) О них см. в следующем параграфе. — *Прим. перев.*

символом Лагранжа (линейным дифференциальным оператором) $x_2\partial/\partial x_3 - x_3\partial/\partial x_2$.

Итак, в соответствии с шестью степенями свободы движения твердого тела мы будем иметь шесть бесконечно малых преобразований, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & E_4 &= x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ E_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2}, & E_5 &= x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ E_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3}, & E_6 &= x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Им соответствуют векторные поля (поля скоростей) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, -x_3, x_2)$, $(x_3, 0, -x_1)$, $(-x_2, x_1, 0)$.

Результат действия поля скоростей (бесконечно малого преобразования) E_i в течение времени t обозначается через $\exp(tE_i)$; таким образом, $\exp(2E_4)$ обозначает поворот около оси x_1 на два радиана. Если $t < 0$, то $\exp(tE_i)$ будет обозначать преобразование, обратное преобразованию $\exp(-tE_i)$. Таким образом, для всех действительных t, u имеем тождество

$$\exp(tE_i)\exp(uE_i) = \exp(\{t+u\}E_i). \tag{31}$$

Каноническими параметрами, например евклидовой группы, называются параметрические представления «твердых» движений при помощи векторов, так что движение твердого тела, которому соответствует вектор $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_6)$, представляет собой конечное преобразование

$$\exp(t_1E_1 + \ldots + t_6E_6), \tag{32}$$

которое выражает полное перемещение тела при воздействии на него поля скоростей $t_1E_1 + \ldots + t_6E_6$ в течение единицы времени.

Наконец, *скобка Пуассона,* или *коммутатор* $[E_i, E_j]$ двух бесконечно малых преобразований E_i и E_j, определяется как двойной предел

$$\lim_{t,\, u\to 0}\left[\frac{1}{tu}\exp(-tE_i)\exp(-uE_j)\exp(tE_i)\exp(uE_j)\right]. \tag{33}$$

Известно, что этот предел представляет собой дифференциальный оператор [1])

$$E_iE_j - E_jE_i = \sum_{h,\ k}\left(E_j^{(h)}\frac{\partial E_i^{(k)}}{\partial x_h} - E_i^{(h)}\frac{\partial E_j^{(k)}}{\partial x_h}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{34}$$

[1]) Запись E_iE_j всюду означает, что сначала применяется оператор E_i, а потом E_j.

который можно легко вычислить. Так, например, в случае евклидовой группы получим тождества:

$$[E_1, E_2] = [E_1, E_4] = 0;$$
$$[E_1, E_5] = -E_3; \quad [E_4, E_5] = -E_6. \tag{35}$$

С помощью очевидного тождества $[E_i, E_j] = -[E_j, E_i]$, из которого, в частности, следует $[E_i, E_i] = 0$, и циклических перестановок индексов в тождествах (35) можно вычислить также и все другие скобки Пуассона $E_1, \ldots, E_6$.

Интересно отметить, что в случае бесконечно малых вращений E_4, E_5, E_6, скобка $[E_i, E_j]$ есть просто внешнее, или векторное, произведение $E_j \times E_i$. Опять-таки, если E_i и E_j (или эквивалентные $\exp(tE_i)$ и $\exp(uE_j)$) *перестановочны*, так что $E_iE_j = E_jE_i$, то $[E_i, E_j] = 0$, и наоборот.

Заметим, что в тождествах (35) всегда справедливо соотношение

$$[E_i, E_j] = \sum_k c_k^{ij} E_k, \tag{36}$$

где c_k^{ij} — соответствующие постоянные. Основная теорема Ли заключается в том, что соотношения, аналогичные (36), справедливы для *любой* конечно-параметрической группы. Постоянные c_k^{ij} называются *структурными постоянными* группы и определяют группу с точностью до изоморфизма.

Мы надеемся, что приведенные только что объяснения позволят понять излагаемые ниже результаты, даже несмотря на то, что их доказательства может понять лишь тот, кто уже знаком с теорией групп Ли.

§ 112. Силы и коммутаторы

Пусть теперь G — произвольное r-параметрическое риманово групповое многообразие, и пусть C — любая однопараметрическая подгруппа группы G, порожденная бесконечно малым преобразованием E.

В группе G вблизи тождественного преобразования всегда можно ([78], стр. 47) так ввести *канонические параметры* с базисом из бесконечно малых преобразований $E_1, E_2, \ldots, E_n$, что если $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ — любой достаточно малый векторный элемент группы G, то

$$\mathbf{q} = \exp(q_1E_1 + \ldots + q_nE_n). \tag{37}$$

С помощью этого обобщения формулы (32) можно получить следующее обобщение тождества (31):

$$\lambda\mathbf{q} \cdot \mu\mathbf{q} = (\lambda + \mu)\,\mathbf{q}, \tag{38}$$

где $r \cdot s$ обозначает («групповое») произведение r и s в группе G.

Теперь рассмотрим геодезическую кривизну подгруппы C при $\mathbf{q} = 0$ в метрике $ds^2 = \sum T_{ij}\, dq_i\, dq_j$. В силу § 108, ее величина пропорциональна следующей величине:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}(T_{ik}\dot{q}_k) - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{hk}}{\partial q_i}\dot{q}_h\dot{q}_k =$$

$$= T_{ik}\ddot{q}_k + \dot{q}_k\frac{\partial T_{ik}}{\partial q_h}\dot{q}_h - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{hk}}{\partial q_i}\dot{q}_h\dot{q}_k = \frac{\partial T_{i1}}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{11}}{\partial q_i}, \quad (39)$$

так как $\dot{q}_1 = 1$, $\dot{q}_j = 0$ при $j = 2, \ldots, r$ и $q_k = 0$ при всех k. Это — видоизмененный тензор Кристоффеля (13′); согласно § 110, коэффициент пропорциональности $v^2 = T_{11}$ подходящим выбором масштаба времени можно свести к единице. В конечном счете в действительности нас интересует не геодезическая кривизна, а величина $\mathbf{Q}$, так что вопрос о коэффициенте пропорциональности не должен нас занимать.

Вычислим теперь частные производные, входящие в последнюю из формул (39). Для этого заметим, что, по определению, бесконечно малый вектор $d\mathbf{q}'$ с началом в $\exp(tE_i)$ эквивалентен при левом сдвиге бесконечно малому вектору $d\mathbf{q}$ с началом в тождественном преобразовании $\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда

$$\exp(tE_i + d\mathbf{q}') = \{\exp(tE_i)\} \cdot d\mathbf{q}. \quad (40)$$

Но правую часть выражения (40) с помощью разложения в ряд Шура — Кэмпбелла — Хаусдорфа [1]) можно представить в виде

$$\{\exp(tE_i)\} \cdot d\mathbf{q} = \exp\left(tE_i + d\mathbf{q} + \frac{1}{2}t\,[E_i,\ d\mathbf{q}] + \ldots\right), \quad (41)$$

где опущены члены, содержащие t во второй степени. Поскольку $d\mathbf{q}$ и $d\mathbf{q}'$ эквивалентные бесконечно малые, отсюда следует соотношение

$$d\mathbf{q} = d\mathbf{q}' - \frac{1}{2}t\,[E_i,\ d\mathbf{q}'] + \ldots. \quad (41')$$

Теперь, записав, что $d\mathbf{q} = dq_1E_1 + \ldots + dq_nE_n$ и $d\mathbf{q}' = dq_1'E_1 + \ldots + dq_n'E_n$, получим, по определению, подобно формуле (36) следующее равенство:

$$[E_i,\ d\mathbf{q}'] = dq_j'\,[E_i,\ E_j] = dq_j'c_h^{ij}E_h.$$

---

[1]) Эта классическая формула доказана при весьма общих условиях на стр. 92 статьи автора «Analytical groups» (теорема 14), *Trans. Am. Math. Soc.*, **43** (1938), 61—101.

Подставив его в векторное уравнение (41′) и приравнивая соответствующие компоненты, получим основное соотношение

$$dq_h = dq'_h - \frac{1}{2} t c_h^{ij} dq'_j + \ldots, \tag{42}$$

где отброшены члены со степенями t выше первой.

Но, по определению риманового группового многообразия, ds^2 инвариантно относительно левых переносов. Поэтому, в силу условия (40) и соотношения (42), можно записать следующие равенства:

$$dq'_h T_{hk}(tE_i)\, dq'_k = dq_h T_{hk}(0)\, dq_k =$$
$$= \left(dq'_h - \frac{1}{2} t c_h^{ij} dq'_j\right) T_{hk}(0) \left(dq'_k - \frac{1}{2} t c_h^{il} dq'_l\right) =$$
$$= dq'_h T_{hk}(0)\, dq'_k - \frac{1}{2} t \left\{c_h^{ij} dq'_j T_{hk}(0)\, dq'_k + c_k^{il} dq'_h T_{hk}(0)\, dq'_l\right\}$$

с точностью до членов выше первой степени относительно t. Переставляя «немые индексы» суммирования j, h и l, k в фигурных скобках, чтобы приравнять коэффициенты, получаем соотношение

$$T_{kh}(tE_i) = T_{hk}(0) - \frac{1}{2} t \left\{c_j^{ih} T_{jk}(0) + c_l^{ik} T_{hl}(0)\right\} + \ldots.$$

Теперь, продифференцировав по t и обозначив оба индекса суммирования через j, получим формулу

$$\frac{\partial T_{hk}}{\partial q_l} = -\frac{1}{2} \left\{c_j^{ih} T_{jk} + c_j^{ih} T_{hj}\right\} \text{ при } \mathbf{0}. \tag{43}$$

Далее, подставив формулу (43) в выражение (39), получим равенство

$$4Q_i = -2c_j^{li} T_{jl} - 2c_j^{li} T_{ij} + c_j^{il} T_{jl} + c_j^{il} T_{lj}.$$

Кроме того, в силу известной антисимметрии $[E_i, E_l] = -[E_l, E_i]$ получаем для структурных постоянных $-c_j^{li} = c_j^{il}$ и $c_j^{ll} = 0$. Подставляя эти выражения в предыдущую формулу и сокращая на четыре, мы получаем окончательную формулу [1])

$$Q_i = c_j^{il} T_{lj}. \tag{44}$$

[1]) Формула (44) была получена в 1945 г. Джоном Брейкуэллом и автором независимо друг от друга. См. Abstract, 52—7—242, *Bull. Am. Math. Soc.*, 52 (1946), 617.

Очевидно, что в случае стационарного движения вдоль оси E_h соответствующая формула будет иметь вид

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} c_j^{ih} T_{hj} = -\sum_{j=1}^{n} c_j^{hi} T_{hj}. \qquad (44^*)$$

Следовательно, *для существования стационарного движения частицы в некотором римановом групповом многообразии G вдоль E_h требуется внешняя сила* (44*). Другими словами, $c_j^{ih} T_{hj}/T_{hh}$ (суммирование по j, но не по h) есть геодезическая кривизна однопараметрической подгруппы $\exp(tE_h)$ на группе G. Если мы выберем нормальный ортогональный базис $E_1, \ldots, E_n$ в метрике ds^2 при **0**, то эта кривизна будет равняться просто c_h^{ih}

§ 113. Приложения

Пользуясь только общей формулой (44*) и соотношениями коммутативности (35) евклидовой группы, можно вывести выражение для внешней силы, которая необходима, чтобы поддерживать стационарное поступательное или вращательное движение в идеальной жидкости. (Сила, с которой жидкость действует на тело, конечно, равна этой силе по величине и противоположна по направлению.) Так, при стационарном переносе E_1, вдоль оси x_1 эта сила равна

$$(0,\ 0,\ 0;\ 0,\ T_{13},\ -T_{12}). \qquad (45)$$

Аналогично при стационарном вращении E_4 с угловой скоростью в один радиан за секунду вокруг оси x_1 требуется сила

$$(0,\ T_{43},\ -T_{42};\ 0,\ T_{46},\ -T_{45}). \qquad (46)$$

Это классические формулы Кирхгофа и Кельвина [1]; заметим, что формула (45) сводится к **0** (стационарное движение при отсутствии внешних сил), если тензор кинетической энергии $\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ *поступательного движения* диагонализирован. Иначе говоря, стационарное поступательное движение при отсутствии внешних сил (теоретически) возможно вдоль главных осей тензора кинетической энергии поступательного движения и ни в каком другом случае [2].

---

[1]) Относительно формулы (45) см. [7], п. 124, формула (4); в § 125 из [7] формула (46) дана неявно; см. также приведенную там библиографию.

[2]) Устойчивость таких поступательных движений исследовал Ursell H. D., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 37 (1941), 150—167.

Несмотря на то что предшествующие формулы сугубо теоретические и что стационарное поступательное движение при отсутствии внешних сил физически невозможно, формула (45) дает классическое объяснение *стремлению плоской пластинки стать широкой стороной* перпендикулярно к течению. Нетрудно показать с помощью (45), что *устойчивым* будет стационарное поступательное движение вдоль главной оси, соответствующей *максимальному компоненту* тензора кинетической энергии. Этот вывод качественно согласуется с экспериментом.

В качестве другого приложения общей формулы (44*) мы можем отметить, что составляющая обобщенной силы равна нулю в любом направлении, соответствующем бесконечно малому преобразованию, *перестановочному* с рассматриваемым стационарным движением. Это следует из того, что если $[E_h, E_i] = 0$, то Q_i равно нулю.

Указанное свойство дает теоретико-групповое обоснование парадокса Даламбера. Стационарное поступательное движение вдоль любой оси не вызывает (теоретически) никакого противодавления, а только вращательный момент, поскольку все поступательные движения перестановочны. Так как поступательные и вращательные движения относительно одной и той же оси перестановочны, поступательное движение не вызывает и никакого вращательного момента вокруг оси переноса, — ось момента перпендикулярна оси поступательного движения.

То же самое рассуждение непосредственно приводит к тому, что можно назвать парадоксом пропеллера. При винтовом движении вокруг оси (в классической теории) нет ни противодавления в направлении этой оси, ни вращательного момента относительно нее! Поэтому для винта самолета или для какого-либо другого предмета, обладающего n-кратной вращательной симметрией относительно этой оси ($n > 1$), все компоненты силы (теоретически) равны нулю [1]).

Как показано в [2], гл. V, § 14, приведенные результаты можно обобщить на случай воображаемых абсолютно твердых тел в идеальной жидкости, заполняющей *неевклидово* пространство. Однако мы не будем приводить этого здесь, поскольку физическое значение таких результатов далеко не ясно. Основное же состоит в том, что *классическую теорию движения абсолютно твердого тела в идеальной жидкости можно рассматривать как часть теории Ли однородных пространств* [2]).

---

[1]) Так как область вне пропеллера односвязна, то это положение нельзя исправить введением «циркуляции» вокруг лопастей пропеллера — без значительных оговорок.

[2]) Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1—2, 1948—1958.

§ 114. Стоксово затухание

В случае малых колебаний лагранжевы методы предыдущих параграфов приводят к выводу о наличии присоединенной массы, из-за чего удлиняется период свободных колебаний, но затухания колебаний они не дают. Первое теоретическое исследование затухания свободных колебаний, вызванного *вязкостью*, было выполнено Стоксом в 1850 г. При этом Стокс пренебрегал конвекцией, что обосновано в случае достаточно малых колебаний, и линеаризовал уравнения движения. Вследствие этой линеаризации он получил «логарифмический декремент» (определяемый как логарифм отношения амплитуд последовательных колебаний), который не зависит от амплитуды. Мы кратко изложим схему вычислений.

При обычной трактовке подъемной силы линеаризованные уравнения движения сводятся лишь к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \tag{47}$$

Мы можем исключить p, применив к обеим сторонам (47) операцию ротор. Обозначив вихрь $\nabla \times \mathbf{u}$ через $\boldsymbol{\zeta}$, получим следующее уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}. \tag{48}$$

В случае *вынужденных* синусоидальных колебаний постоянной амплитуды и угловой частоты ω уравнение (48) эквивалентно уравнению

$$\nabla^2 \boldsymbol{\zeta} = \left(\frac{i\omega}{\nu}\right) \boldsymbol{\zeta}. \tag{48*}$$

При этом мы придерживаемся обычного соглашения, что *физический* вихрь скорости есть *действительная* часть комплексной функции пространственных координат и времени, аналитической по времени.

В случае плоских и осесимметричных течений (т. е. в случае поперечных колебаний цилиндров и продольных колебаний тел вращения) величину ζ можно выразить через стоксову функцию тока V. (Так, для плоского течения $\zeta = \nabla^2 V$). Это намного упрощает краевые условия.

Детали довольно длинных вычислений ([13], т. 3, стр. 22—54, или [7], § 345—354) мы опускаем. Для *сферы* радиуса a пол-

ной динамической характеристикой является сила ([7], § 354, (26))

$$-X=\rho\cdot\text{объем }(\Sigma)\left\{\frac{1}{2}\ddot{q}+\frac{9S}{2\sqrt{2}}\dot{q}+\frac{9}{2}\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+S^2\right)q\right\},\qquad S=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}. \tag{49}$$

Это значит, что помимо находящейся в той же фазе силы инерции присоединенной массы $\frac{1}{2}\rho\cdot$объем (Σ) (согласно § 98), имеется еще синусоидальная сила с амплитудой в $9S$ раз большей и со сдвигом фазы на 135° и другая синусоидальная сила с амплитудой в $9S^2$ раз большей и со сдвигом фазы на 180° по отношению к фазе колебаний.

Последняя сила — это просто сопротивление стационарному «ползущему обтеканию» сферы, движущейся с постоянной скоростью (§ 30). Первую же силу можно истолковать как силу *торможения пограничного слоя*, и такую схему мы рассмотрим сейчас в общем случае.

§ 115. Торможение пограничного слоя

В 1850 г. Стокс ([13], т. 3, стр. 21) предположил, что «воздействие жидкости можно вычислить с весьма большой степенью точности, если рассматривать каждый элемент поверхности твердого тела как элемент некоторой бесконечной плоскости, колеблющейся с той же линейной скоростью». Хотя Стокс предложил это только для крутильных колебаний твердого тела вращения вокруг его оси, то же самое приближение было предложено и для малых поступательных колебаний [1]). Поскольку эта идея вытекает из теории пограничного слоя Прандтля (§ 27), если пренебречь конвекцией, то вычисленную выше силу мы будем называть силой *пограничного слоя*.

Для синусоидальных продольных колебаний ее можно легко вычислить. Эта сила сдвинута по фазе на 135° относительно движения ([7], стр. 620). Поэтому если F есть максимальное значение силы и $-\dot{E}$ есть усредненная скорость рассеяния энергии, то, очевидно, $-\dot{E}=F\dot{q}/2\sqrt{2}$, где $\dot{q}$ — максимальная скорость колебаний твердого тела Σ. Но средняя скорость рассеяния энер-

[1]) Boussinesq J., *J. de Math.*, 4 (1878), 335—376. Carrier G. F., Prima R. C., *J. Appl. Mech.*, 23 (1956), 601—605, предложили поправку второго порядка.

гии в расчете на элемент поверхности площади dS равна ([7], стр. 620, (9)) величине

$$-d\dot{E} = \rho \sqrt{\frac{\nu\omega}{8}}\, v_t^2(\mathbf{x})\, dS, \tag{50}$$

где $v_t(\mathbf{x})$ есть максимальная локальная тангенциальная скорость в течении Эйлера. Зная $v_t(\mathbf{x})$, можно вычислить $-\dot{E}$ и, следовательно, силу F, проинтегрировав выражение (50) по поверхности тела.

Так, если Σ — сфера радиуса a, то $v_t(\mathbf{x}) = (3\dot{q}/2)\sin\theta$. Интегрируя, получаем $-\dot{E} = 3\pi\rho\sqrt{\nu\omega/2}\,\dot{q}^2a^2$. Следовательно, сила, действующая на сферу со стороны пограничного слоя, равна

$$F = 6\pi\rho q\sqrt{\nu\omega} = \left[\frac{9}{2}\rho \cdot \text{объем } (\Sigma)\right]\left(\frac{\sqrt{\nu\omega}}{a}\right) = 9m'S. \tag{51}$$

Аналогичную формулу можно вывести для синусоидальных колебаний твердого тела произвольной формы [1]).

Применив к уравнению (48) преобразование Фурье, можно также вычислить результирующую силу в случае малого движения при любом его протекании в прошлом [2]). Однако основной вопрос таков: *применимы* ли полученные таким образом формулы, и его мы сейчас рассмотрим.

§ 116. Колебания с большой амплитудой

Хотя часы с маятником сейчас имеют куда меньше значения, чем в 1800 г., однако было выполнено много опытов с тем, чтобы проверить правильность формулы Стокса (49) [3]). Очевидно, что множитель присоединенной массы k и коэффициент затухания являются функциями как относительной амплитуды α, так и числа Стокса S. К сожалению, при свободном затухании величина α — переменная, и в большинстве опытов она не замерялась; по этой и по другим причинам значение многих опытов остается неясным.

Пожалуй, наиболее важными для случая больших амплитуд и малых S являются опыты Кейлегана и Карпентера [4]) с ци-

[1]) Lighthill M. J., *Proc. Roy. Soc.*, **A224** (1954), 1—23.

[2]) Rayleigh, *Phil. Mag.*, **21** (1911), 697—710; еще раньше такие формулы получили Boussinesq и Basset.

[3]) Meyer O. E., *J. f. Math.*, **73** (1871), 31—68; Northway M. Y., Mackenzi, *Phys. Rev.*, **13** (1901), 145—164; McEwen G. F., там же, **33** (1911), 492—511; Marty L., *J. de Phys. et Radium* (Paris), **6** (1935), 373—382; Valensi J., Clarion C., Bull. Soc. France Mec., № 8; Richardson E. G., Tait R. I., *Ost. Ing.-Archiv*, **8** (1954), 200—207. Другие ссылки даны ниже и в § 103—104; см. также § 31—32.

[4]) Keulegan G. H., Carpenter L. H., *J. Res. Nat. Bu.* Standards, **60** (1958), 423—440.

линдрами и пластинками, помещенными в колеблющуюся жидкость. Полученные в этих опытах данные показывают любопытную зависимость присоединенной массы и затухания от относительной амплитуды, чего нет в формуле Стокса.

Пусть $x = A\sin\beta t$ обозначает зависящее от времени смещение, так что $T = 2\pi/\beta$ есть период, $\theta = \beta t$ — фаза и $u_m = A\beta$ — максимальная скорость. Сила $X(\theta)$ измерялась как функция фазы; ввиду симметрии, $X(\theta + \pi) = -X(\theta)$. Обозначим диаметр тела Σ через d, так что относительная амплитуда равна $\alpha = 2A/d$.

Для измеренных значений функции $X(\theta)$ оказалась подходящей полуэмпирическая формула

$$-X(\theta) \simeq c\dot{x}|\dot{x}| + M\ddot{x}. \tag{52}$$

В основе этой формулы лежит предположение, что сила $-X(\theta)$ должна быть суммой силы лобового сопротивления $D = \frac{1}{2}\rho d\dot{x}^2 C_D$, пропорциональной квадрату скорости, и инерциальной силы $M\ddot{x} = (\pi\rho d^2/4)C_M\ddot{x}$, пропорциональной ускорению. Если бы действительно было так, то C_D и C_M можно было бы вычислять по формулам

$$C_D = \frac{-3}{4\rho u_m^2 d}\int_0^{2\pi} X(\theta)\cos\theta\, d\theta \tag{53}$$

и

$$C_M = \frac{4A}{\pi^2\rho u_m^2 d^2}\int_0^{2\pi} X(\theta)\sin\theta\, d\theta. \tag{53'}$$

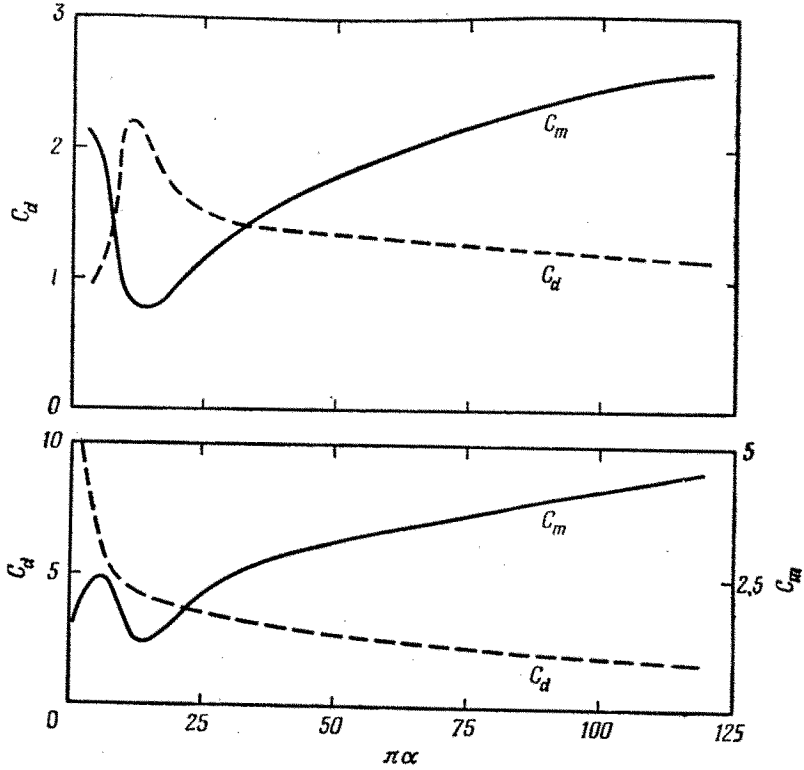
Эмпирически было найдено, что для данных, полученных при колебаниях с большой амплитудой, вполне справедлива формула (52), когда эмпирические постоянные C_D и C_M определяются по формулам (53) и (53'). Измеренные значения постоянных C_D и C_M зависят в первую очередь от относительной амплитуды $\alpha = 2A/d$ и сравнительно мало[1]) — от числа Стокса S. Графики измеренных значений C_D и C_M изображены на рис. 28.

Интересно сопоставить формулу (52) с формулой, которая получается при стоксовых приближениях для малой амплитуды, т. е. с формулой

$$-X(\theta) = c_1'\dot{x} + m^*\ddot{x}, \qquad m^* = (m' + m_0), \tag{52'}$$

[1]) Когда $\alpha \gg 1$, можно ожидать, что связь с «числом Рейнольдса» $\mathrm{Re} = u_m d/\nu = \alpha/2S^2$ будет иметь большое значение; см. Bagliarello — работу, цитированную в § 103.

где m' — теоретическая присоединенная масса, а масса вытесненной жидкости — $m_0 = \rho \cdot$ объем (Σ). Для плоской пластинки, поставленной поперек течения, или для кругового цилиндра известно ([7], стр. 85), что $m' = \pi\rho d^2/4$. В формулу (52′) необходимо



Р и с. 28. Присоединенная масса цилиндра (вверху) и пластинки (внизу).

включить член m_0, так как препятствие удерживается неподвижным в колеблющейся жидкости; этого слагаемого не было бы, если бы препятствие колебалось в неподвижной жидкости. Эту разность можно вычислить, если учесть, что в системе жидкость постоянной плотности ρ и твердое тело при синусоидальных поступательных колебаниях всей системы на твердое тело Σ действует сила $m_0\ddot{x}$. Очевидно, что $X(\theta)$ не зависит от ρ.

Для сравнения были вычерчены также кривые значений $C_м$ — для цилиндров и пластинок соответственно, — полученных

по линеаризованной теории Стокса. Очевидно, что формулы Стокса совершенно неприменимы к колебаниям с большой амплитудой.

§ 117. Заключительный параграф

Цель книги — кое-что внести в науку о природе. Заимствуя слова у Ньютона [1]), можно было бы сказать, что «сочинение это предлагается в качестве математических принципов науки, ибо, по-видимому, все трудное дело науки состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать, каковы силы природы, и по этим силам объяснить явления». Мы старались следовать высказыванию Аристотеля: «Давайте сначала поймем факты, а тогда мы уже сможем искать причины», памятуя также о принципе Ньютона (цит. соч., стр. 398): «Нам, конечно, не следует отбрасывать свидетельства экспериментов ради видений и призрачных измышлений, придуманных нами самими» [2]).

В соответствии с этим мы начали с описания ряда парадоксов, которые получаются при изучении движений жидкости как чисто логические выводы и при изучении сложных явлений действительности. Эта тема была основной в первых трех главах, она проходит и в четвертой, где указаны некоторые спорные места в обычной теории моделирования, и время от времени мы обращались к ней до последних параграфов включительно.

Новизна нашего способа изложения состоит в том, что мы видим причину парадоксов в недостаточной строгости исследования: правда, некоторые специалисты объявляют этот недостаток проявлением мужественной силы, — но, конечно, под такое знамя не стали бы ни Ньютон, ни Эйлер, ни Лагранж, ни Стокс и никто другой из основоположников науки о движении жидкостей. И, пожалуй, главная заслуга (критического характера) этой книги — строгий анализ теоретических основ механики реальных жидкостей.

В качестве нашего главного положительного достижения мы укажем на применение в механике жидкостей понятия группы. Так, в четвертой главе обнаруживается, что это понятие является ключевым в теории моделирования (теории «подобия»). Не-

---

[1]) Предисловие к его Principa Mathematica. Автор пользовался английским переводом в издании F. Cajori, Berkeley, 1947, стр. XVII—XVIII.

[Ср. с переводом на русский яз. А. Н. Крылова в VII томе его «Собрания трудов», М.—Л., 1936, стр. 3.] — *Прим. перев.*

[2]) В переводе А. Н. Крылова (см. предыдущее примечание) это место передано более энергично: «Понятно, что в противность ряду опытов не следует измышлять на авось каких-либо бредней...» (цит. соч., стр. 503). — *Прим. перев.*

мало других применений теории групп дано в пятой и шестой главах. Кульминацией здесь было истолкование силы, действующей на твердое тело при любом его стационарном движении в идеальной жидкости, как кривизны соответствующей однопараметрической подгруппы в пространстве евклидовых групп, метрика которого определяется кинетической энергией.

Итак, автор пытался перебросить два моста через расширяющийся провал между чистой математикой и физикой. Об успехе этого надо судить по будущим работам тех читателей книги, для которых она окажется стимулом к исследованиям.

ЛИТЕРАТУРА

К главам I и II

1. Биркгоф (Birkhoff G.), Reversibility paradox and twodimensional airfoil theory, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 247—256.
2. Биркгоф Г., Гидродинамика, ИЛ, М., 1954.
3. Гольдштейн С. (ред.), Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. I и II, ИЛ, М., 1948.
4. Келлог (Kellogg O. D.), Potential Theory, Springer, 1929.
5. Кранц (Cranz C.), Lehrbuch der Ballistik, Berlin, 1925.
6. Курант Р. и Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
7. Ламб Г., Гидродинамика, М.—Л., 1947. См. также Приложение ко 2-му нем. изд. Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, 1931.
8. Милн-Томсон (Milne-Thomson L. M.), Theoretical Hydrodynamics, Oxford, 1955 (готовится русский перевод 4 изд., ИЛ).
9. Озеен (Oseen C. W.), Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig, 1927.
10. Освати ч (Oswatitsch K.), Gasdynamik, Wien, Springer, 1952.
11. Прандтль Л. и Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, тт. 1, 2, М.—Л., ГТТИ, 1932—1935.
12. Рэлей (Rayleigh J. W.), Scientific Papers, v. 1—6, Cambridge University Press, 1899—1920.
13. Стокс (Stokes G.), Mathematical and physical papers, Cambridge Univ. Press, 1880—1905.
14. Хейз У. и Пробстин Р., Теория гиперзвуковых течений, ИЛ, М., 1962.
15. Хоуарт Л., (ред.), Современное состояние аэродинамики больших скоростей, тт. 1, 2, ИЛ, М., 1955, 1956.
16. Эммонс Г., (ред.), Основы газовой динамики, ИЛ, М., 1963.

К главе III

17. Биркгоф и Царантонелло (Birkhoff G., Zarantonello E. H.), Jets, Wakes and Cavities, Academic Press, 1957 (готовится русский перевод, ИЛ).
18. Биркгоф (Birkhoff G.), Formation of vortex streets, *J. Appl. Phys.*, **24** (1953), 98—103.
19. Бриллюэн (Brillouin M.), Les surfaces de glissement de Helmholtz..., *Ann. de Chim. Phys.*, **23** (1911), 145—230.
20. Бэтчелор и Дэвис (Batchelor G. K., Davies R. M.), Surveys in Mechanics, Cambridge Univ. Press, 1956.
21. Вайнштейн (Weinstein A.), Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen, *Math. Z.*, **31** (1929), 424—433.

22. Вилла (Villat H.), Sur la résistance des fluides, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **28** (1911), 203—240.
23. Вортингтон (Worthington A. M.), A study of splashes, Longmans, 1908.
24. Гарабедян, Леви и Шиффер (Garabedian P. R., Lewy H., Schiffer M.), Axially symmetric cavitational flow, *Ann. Math.*, **56** (1952), 560—602.
25. Гарабедян (Garabedian P. R.), Calculation of axially symmetric cavities and jets, *Pacif. J. Math.*, **6** (1956), 611—684.
26. Гарабедян (Garabedian P. R.), ... three dimensional cavities and ets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956), 219—235.
27. Гельмгольц (Helmholtz H.), Uber discontinuierliche Flussigkeitsbewegungen, Monatsber. Berlin. Akad. (1868), 215—228. [Имеется русский перевод этой статьи: Гельмгольц, Два исследования по гидродинамике. I. О вихревом движении. II. О прерывном движении жидкости, перевод под ред. С. А. Чаплыгина, 1902. — *Прим. ред.*]
28. Гильбарг (Gilbarg D.), Uniqueness of axially symmetric flows with free boundaries, *J. Rational Mech. and Analysis*, **1** (1952), 309—320.
29. Гильбарг и Андерсон (Gilbarg D., Anderson R. A.), Influence of atmospheric pressure on... entry of spheres into water, *J. Appl. Phys.*, **19** (1948), 157—169.
30. Кельвин (Kelvin W.), *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **7** (1869), 384—390, 668—672. См. также Math. and Phys. Papers, vol. 4, 69—75, 93—97, 101—114.
31. Кирхгоф (Kirchhoff G.), Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, *Crelle's Jour. für Math.*, **70** (1869), 289—298.
32. Купер (Cooper R. D.) (ред.), Naval Hydrodynamics, vol. 2, Publication ACR—38, U. S. Govt. Printing Office, 1960.
33. Леви-Чивита (Levi-Civita T.), Scie e leggi de resistenzia, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, **23** (1907), 1—37.
34. Левинсон (Levinson N.), The asymptotic shape of the cavity..., *Ann. Math.*, **47** (1946), 704—730.
35. Лерэ (Leray J.), Les problèmes de représentation conforme de Helmholtz, théorie des sillages et des proues, *Comment. math. helv.*, **8** (1935), 149—180 and 250—263.
36. Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, М., ИЛ, 1958.
37. Прандтль и Бетц (Prandtl L., Betz A.), Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Goettingen, 1927.
38. Рэлей Дж., Теория звука, т. I, изд. 2-е, Физматгиз, 1955, гл. XX, XXI.
39. Рябушинский (Riabouchinsky D.), *Proc. London, Math. Soc.*, **19** (1921), 206—215. См. там же, **25** (1926), 185—194 и Пул (Poole E. G. C.), там же, **25** (1926), 195—212.
40. Саусвелл и Вайси (Southwell R. V., Vaisey G.), Fluid motions characterized by free streamlines, *Philos. Trans.*, **240** (1946), 117—161.
41. Тейлор (Taylor G.), The instability of liquid surfaces..., *Proc. Roy. Soc.*, **201** (1950), 192—196.
42. Шерман (Sherman F. S.), (ред.), Naval Hydrodynamics, vol. 1, Publ. 515, National Acad. Sci.-Nat'l. Res. Council, Washington, 1957.
43. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, М., 1956.
44. Cavitation in Hydrodynamics, H. M. Stationery Office, London, 1936.

К главе IV

45. Биркгоф и Маклэйн (Birkhoff G., MacLane S.), Survey of Modern Algebra, N. Y., 1953.
46. Бриджмен П., Анализ размерностей, М.—Л., 1934.
47. Букингем (Buckingham E.), On physically similar systems, *Phys. Rev.*, **4** (1914), 354—376.
48. Букингем (Buckingham E.), Model experiments and the forms of empirical equations, *Trans. ASME*, **37** (1915), 263—296.
49. Бюргерс, Доббинга, Труст и Боссен (Burgers J. M., Dobbinga E., Troost L., Bossen M. J.), Modelproeven en Kengrootheden op Stromingsgebied, Amsterdam, 1947.
50. Крейа (Craya A.), Similitude des modèles fluviaux à fond fixe, *Houille blanche*, **3** (1948), 335—346.
51. Лангхар (Langhaar H. L.), Dimensional analysis and theory of models, Wiley, 1951.
52. Мартино-Лагард (Martinot-Lagarde A.), Analyse dimensionelle. Applications à la mécanique des fluides, Lille, 1946.
53. Мартино-Лагард (Martinot-Lagarde A.), Similitude physique: exemples d'applications a la mécanique des fluides, Memorial 66 des Sciences Physiques. Gauthier-Villars, 1960.
54. Портер (Porter A. W.), The Method of Dimensions, Methuen. 1933.
55. Рейнольдс (Reynolds O.), Collected Papers, особенно Vol. I, 257—390 and Vol. II, 51—105.
56. Руарк (Ruark A. E.), Inspectional Analysis: A method which supplements dimensional analysis, *J. Elisha Mitchell Scient Soc.*, **51** (1935), 127—133.
57. Седов Л. И., Методы подобия и размерностей в механике, изд. 4-е, М., Гостехиздат, 1957.
58. Стокер Дж., Волны на воде, М., ИЛ, 1959.
59. Фурье (Fourier J. B. J.), Théorie analytique de la chaleur, 1822.
60. Эренфест-Афанасьева (Ehrenfest-Afanassjewa T.), Dimensionsbegriff und Bau physikalischer Gleichungen, *Math. Ann.*, **77** (1915), 259—276.
61. Эренфест-Афанасьева (Ehrenfest-Afanassjewa T.), Dimensional analysis... theory of similitudes, *Philos. Mag.*, **1** (1926), 257—272.

К главе V

62. Бехерт (Bechert K.), Differentialgleichungen der Wellenaus breitung in Gasen, *Ann. Physik*, **39** (1941), 357—372; Ebene Wellen in idealen Gasen mit Reibung und Warmeleitung, там же, **40** (1941), 207—248.
63. Биркгоф (Birkhoff G.), Dimensional analysis and partial differential equations, *Electr. Engng.*, **67** (1948), 1185—1188.
64. Биркгоф (Birkhoff G. D.), The principle of sufficient reason, *Rice Inst. Pamphlet*, **28** (1941), № 1, 24—50.
65. Блазиус (Blasius H.), Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. angew. Math.* und *Phys.*, **56** (1908), 1—37.
66. Вейль (Weyl H.), The differential equations of the simplest boundary-layer problems, *Ann. Math.*, **43** (1942), 381—407.
67. Гэйс (Geis Th.), Ahnlichen dreidimensionalen Grenzschichten, *J. Rational. Mech. and Analysis*, **5** (1956), 643—686.
68. Диксон (Dickson L. E.), Differential equations from the group standpoint, *Ann. Math.*, **25** (1924), 287—378.

69. Прандтль (Prandtl L.), Neuere Untersuchungen über die strömende Bewegungen der Gase und Dämpfe, *Phys. Zeits.*, 8 (1907), 23—31.
70. Редхеффер (Redheffer R. M.), Separation of Laplace's equation, Doctoral Thesis, Mass. Inst. Techn (1948). См. также Левинсон, Боджерт, Редхеффер (Levinson N., Bogert B., Redheffer R.), Separation of Laplace's equation, *Quart. Appl. Math.*, 7 (1949), 241—262.
71. Розенблат (Rosenblatt A.), Solutions exactes des equations du mouvement des liquides visqueux, *Mem. Sci. Math.*, 72 (1935), 63.
72. Седов Л. И., О нестационарных движениях сжимаемой жидкости, *ДАН СССР*, 47 (1945), 91—93 и 52 (1946), 17—20.
73. Станюкович К. П., Нестационарное движение сплошной среды, М., 1955.
74. Станюкович К. П., Об автомодельных решениях уравнений гидродинамики, обладающих центральной симметрией, *ДАН СССР*, 48 (1945), 310—312 (1948), 1141—1144; 64 (1949), 29—32, 179—181 и 467—470.
75. Тейлор и Маккол (Taylor G. I., Maccoll J. W.), The air pressure on a cone moving at high speeds, *Proc. Royal Soc.*, A 139 (1933), 278—311; Маккол (Maccoll J. W.), The conical shock wave formed by a cone moving at high speed, там же, A 159 (1937), 459—472.
76. Уиттекер Э., Аналитическая динамика. М.—Л., ОНТИ, 1937.
77. Фокнер и Скан (Falkner V. M., Skan S. W.), Solutions of the boundary layer equations, *Philos. Mag.*, 12 (1931), 865—896.
78. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, М., 1947.

К главе VI

79. Драйден, Мурнаган и Бейтмен (Dryden H. L., Murnaghan F. D., Bateman H.), Hydrodynamics, Bull. 84 Nat. Res. Council, Washington, 1932.
80. Кельвин (Kelvin W.), Hydrokinetic solutions and observations, *Philos. Mag.*, 42 (1871), 362—380.
81. Кирхгоф (Kirchhoff G.), Über die Bewegung eines Rotationskorpers in einer Flussigkeit, *Crelle's, J. für Math.*, 71 (1869), 237—273.
82. Ламб (Lamb H.), On the forces experienced by a solid moving through a liquid, *Quar. Journ.*, 19 (1883), 66—70.
83. Тейлор (Taylor G. I.), The energy of a body moving in an infinite fluid, with an application to airships, *Proc. Royal Soc.*, A 120 (1928), 13—22 и 260—283.
84. Теодорсен (Teodorsen Th.), Impulse and momentum in an infinite Fluid, Th. Karman Anniversary Volume, Calif. Inst. Techn., 1941, 49—58.
85. Томсон и Тэт (Thomson W., Tait P. G.), Principles of Natural Philosophy, v. 1—2, особенно раздел 313.
86. Шиффер и Сегё (Schiffer M., Szegö G.), Virtual mass and polarization, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 (1949), 130—205.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. I, II, М.—Л., 1948.
2*. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946.
3*. Келдыш М. В., Франкль Ф. И., Внешняя задача Неймана для линейных эллиптических уравнений в приложениях к теории крыла в сжимаемом газе, Изв. *АН СССР*, сер. мат., № 4, 1934.

4*. Никольский А. А. и Таганов Г. И., Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения, *ПММ*, т. X, вып. 4 (1946).
5*. Франкль Ф. И., *ПММ*, т. XI, вып. 1 (1947).
6*. Франкль Ф. И., Карпович Е. А., Газодинамика тонких тел, М.—Л., 1948.
7*. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.—Л., 1950.
8*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, М., 1954.
9*. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, М., 1957.
10*. Жуковский Н. Е., Полное собрание сочинений, т. VII, М.—Л., 1937.
11*. Булах Б. М., Сверхзвуковой поток около наклоненного кругового конуса, *ПММ*, т. XXVI, вып. 2 (1962).
12*. Willet J. E., Supersonic flow at the surface of a circular cone at angle of attack, *Journ. Aero/Sp. Sci.*, 27, № 12 (1960).
13*. Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, М., 1962.
14*. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, М., 1957.
15*. Жуковский Н. Е., Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока, Собр. соч., т. II, 1935.
16*. Эфрос Д. А., Гидродинамическая теория плоскопараллельного кавитационного течения, *ДАН СССР*, 51, № 4 (1946).
17*. Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, М., 1961.
18*. Чаплыгин С. А., К вопросу о струях в несжимаемой жидкости, Труды отдел. физ. наук общ. любителей естеств. наук, т. 10, вып. 1, 1899.
19*. Гуревич М. М., Сретенский Л. Н., О работах С. А. Чаплыгина по гидродинамике (в т. III Собр. соч. С. А. Чаплыгина, 1950).
20*. Некрасов А. И., О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга, *Изв. Иваново-Вознесенского политехн. ин-та*, № 5 (1922).
21*. Лаврентьев М. А., О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй, *Матем. сб.*, новая серия, 4 (46), № 3 (1938).
22*. Лаврентьев М. А., Кумулятивный заряд и принцип его работы, *Усп. матем наук*, т. XII, вып. 4 (76) (1957).
23*. Жуковский Н. Е., Определение движения жидкости при какомнибудь условии, данном на линии тока, *Ж. Русск. физ.-хим. о-ва*, *XXII* (1891).
24*. Кочин Н. Е., О неустойчивости вихревых цепочек Кармана, *ДАН СССР*, XXIV, № 1 (1939).
25*. Седов Л. И., О неустановившемся движении внутри жидкости тела вращения, Труды ЦАГИ, № 519, 1940.
26*. Риман И. С., Крепс Р. Л., Присоединенные массы тел различной формы, Труды ЦАГИ, № 635, 1947.
27*. Седов Л. И., Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости, Труды ЦАГИ, № 182, 1935.
28*. Жуковский Н. Е., Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости, Избр. соч., т. I, М.—Л., 1948.
29*. Хаскинд М. Д., Приближенные методы определения гидродинамических характеристик качки, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 11 (1954).
30*. Блох Э. Л., Горизонтальный удар эллипсоида вращения об идеальную жидкость при наличии свободной поверхности, *ПММ*, т. XVII, вып. 6 (1953).

31*. Иванова Л. С., Присоединенная масса жидкости, наполняющей открытый прямоугольный сосуд, *ПММ*, т. **XVII**, вып. 4 (1953).
32*. Хаскинд М. Д., Акустическое излучение колеблющихся тел в сжимаемой жидкости, *Журн. эксп. и теорет. физики*, **16**, вып. 7 (1946).
33*. Справочник авиаконструктора, т. II, Гидромеханика гидросамолета, М., 1938.
34*. Жуковский Н. Е., Лекции по гидродинамике, Собр. соч., т. II, М., 1949.
35*. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М.—Л., 1948.
36*. Бобылев Д. К., Заметка о давлении, производимом потоком неограниченной ширины на две стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом, *Ж. Русск. физ.-хим. о-ва, XIII* (1881).
37*. Мещерский И. В., К вопросу о сопротивлении жидкостей, *Ж. Русск. физ.-хим. о-ва*, **XVIII** (1886).
38*. Котельников А. П., О давлении жидкой струи на клин, Собрание протоколов секции физико-математических наук в Казани, VIII (1889).
39*. Секерж-Зенькович Я. И., К задаче об обтекании дуги круга с отрывом струи, *ДАН СССР*, **2**, № 6—7 (1934).
40*. Эфрос Д. А., Построение струйных течений методом электрического моделирования, *Изв. АН СССР, ОТН*, № 9 (1947).
41*. Секерж-Зенькович Я. И., Обобщенная схема Кирхгофа и ее применение к изучению поляры Лилиенталя, Труды ЦАГИ, № 170, 1934.
42*. Лаврентьев М. А., Келдыш М. В., О решении задач на удар о воду, Труды ЦАГИ, № 152, 1935.
43*. Чаплыгин С. А., Лаврентьев М. А., О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности, Труды ЦАГИ, № 123, 1933.
44*. Никольский А. А., Сб. теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957.
45*. Ведров В. С., Динамическая устойчивость самолета, Оборонгиз, 1938.
46*. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В., Теория точечного взрыва, Физматгиз, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму русскому изданию . . . 5
Из предисловия автора . . . 13

Глава I. Парадоксы невязкого течения . . . 15

§ 1. Теоретическая гидродинамика . . . 15
§ 2. Гидродинамические парадоксы . . . 17
§ 3. Уравнения Эйлера . . . 18
§ 4. Потенциал скорости . . . 21
§ 5. Стационарные безвихревые течения . . . 23
§ 6. Парадокс обратимости . . . 25
§ 7. Парадокс Даламбера . . . 27
§ 8. Теория крылового профиля . . . 29
§ 9. Эффект Магнуса; деривация . . . 31
§ 10. Волновое лобовое сопротивление тонких крыльев . . . 34
§ 11. Тонкие тела вращения . . . 36
§ 12. Парадокс Эршоу . . . 37
§ 13. Возникновение ударной волны . . . 38
§ 14. Термодинамика невязких жидкостей . . . 39
§ 15. Буруны и боры . . . 41
§ 16. Парадокс Ферри . . . 42
§ 17. Парадокс тройной ударной волны . . . 44
§ 18. Значение уравнений Эйлера . . . 45

Глава II. Парадоксы вязкого течения . . . 47

§ 19. Уравнения Навье — Стокса . . . 47
§ 20. Реальные газы и жидкости . . . 49
§ 21. Несжимаемые вязкие жидкости . . . 50
§ 22. Парадокс неаналитичности . . . 53
§ 23. Существование и единственность . . . 54
§ 24. Течение Пуазейля . . . 55
§ 25. Парадокс турбулентности . . . 56

§ 26. Другие парадоксы симметрии 59
§ 27. Теория пограничного слоя 60
§ 28. Парадоксы Эйфеля и Дюбуа 62
§ 29. Регулирование пограничного слоя 63
§ 30. Парадокс Стокса 66
§ 31. Уравнения Озеена 68
§ 32. Парадокс пузырька 69
§ 33. «Вторая» вязкость 70
§ 34. Молекулярные эффекты 72
§ 35. Выводы 74

Глава III. Струи, следы и кавитация 76

§ 36. Разрывные течения 76
§ 37. Годографы в виде полукруга 78
§ 38. Истечение струи из щели 80
§ 39. Схема обтекания по Кирхгофу 81
§ 40. Влияние стенок 82
§ 41. Неустойчивость течений Гельмгольца 84
§ 42. Кавитация 86
§ 43. Параметры ϱ'/ϱ и Q 88
§ 44. Модели течений при $Q \neq 0$ 90
§ 45. Криволинейные препятствия 92
§ 46. Прямая задача 95
§ 47. Неопределенность точки отрыва 97
§ 48. Осесимметричные течения Гельмгольца 99
§ 49. Законы сохранения 100
§ 50. Кавитационные течения как течения Гельмгольца 103
§ 51. Пузырьки 105
§ 52. Неустойчивость по Тейлору 107
§ 53. Масштабные эффекты при входе в воду 109
§ 54. Реальные следы 111
§ 55. Вихревые модели следов 112
§ 56. Вихревые дорожки 114
§ 57. Количество движения в следе 115

Глава IV. Моделирование и анализ размерностей 118

§ 58. О моделях 118
§ 59. Анализ размерностей 119
§ 60. Группа подобия 120
§ 61. Соотношения, не зависящие от единиц измерения 122
§ 62. Числа Рейнольдса и Маха 125
§ 63. П-теорема 127

§ 64. Обсуждение доказательства 129
§ 65. Независимы ли физические законы от выбора единиц? . . 133
§ 66. Инспекционный анализ 135
§ 67. Связь с теорией групп 136
§ 68. Теория моделирования 138
§ 69. Частный инспекционный анализ 139
§ 70. Инерциальное моделирование 140
§ 71. Моделирование по числу Рейнольдса 142
§ 72. Моделирование по числу Фруда и по числу кавитации . . 143
§ 73. Моделирование по числу Маха 145
§ 74. Асимптотическое изменение масштаба 149
§ 75. Аэродинамические трубы 151
§ 76. Опытовые бассейны 152
§ 77. Модели рек и гаваней 154
§ 78. Моделирование входа в воду 156

Глава V. Теория групп и гидромеханика 159

§ 79. Введение 159
§ 80. Симметричные решения уравнения теплопроводности . . . 160
§ 81. Спиральные течения вязкой жидкости 162
§ 82. Пограничные слои у клиньев 165
§ 83. Струи и следы в вязкой жидкости 166
§ 84. Течения Прандтля — Мейера 167
§ 85. Конические течения Тейлора — Маккола 170
§ 86. Расходящиеся волны давления 172
§ 87. Политропная симметрия 174
§ 88. Конические течения 175
§ 89. Локальные и глобальные решения 177
§ 90. Теория групп и метод разделения переменных 181
§ 91. Случай вязкой жидкости 183
§ 92. Обратные методы 185
§ 93. Общие замечания 188
§ 94. Метод годографа 189
§ 95. Инерциальное плоское движение 191
§ 96. Теорема Бьянки 193
§ 97. Заключение 195

Глава VI. Присоединенные массы 196

§ 98. Присоединенная масса сферы 196
§ 99. Приложения 197
§ 100. Инерциальные лагранжевы системы 198
§ 101. Тензор присоединенной массы 200

§ 102. Геометрические фигуры частных видов; тело Рэнкина . . 202
§ 103. Теория и эксперимент 205
§ 104. Коэффициенты устойчивости 206
§ 105. Присоединенная масса и количество движения 208
§ 106. Другие интерпретации 211
§ 107. Каноническая форма 212
§ 108. Геометрическая интерпретация 215
§ 109. Доказательство того, что система является лагранжевой . 216
§ 110. Однородность 219
§ 111. Сведения из теории групп Ли 221
§ 112. Силы и коммутаторы 223
§ 113. Приложения 226
§ 114. Стоксово затухание 228
§ 115. Торможение пограничного слоя 229
§ 116. Колебания с большой амплитудой 230
§ 117. Заключительный параграф 233

Литература 235
Дополнительная литература 238

Г. Биркгоф
ГИДРОДИНАМИКА

Редактор *А. С. Попов* Технический редактор *М. П. Грибова*
Художник *В. М. Новоселова* Корректор *О. К. Румянцева*

Сдано в производство 5/III 1963 г. Подписано к печати 10/IX 1963 г. Бумага 60×90¹/₁₆ = =7,8 бум. л. 15,25 печ. л. в т/ч. 2 вкл. Уч.-изд. л. 14,4 Изд. № 1/1483. Цена 1 р. 22 к. Зак. 1209.

* * *

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.